

**WP 11-16**

Forschungsprojekt  
Tragwerk-FMEA

Institut für Statik und Dynamik  
der Universität Kassel

20.12.2010

### **Stand sicherheitsnachweise mit finiten Elementen**

Die Aufgabe des Tragwerksplaner ist es die Standsicherheit eines Gebäudes zu garantieren. In der Regel wird er die Statik mit Hilfe eines FE-Programms aufstellen. Mit entscheidend für die Qualität der Statik ist, dass der Aufsteller die Grenzen und die Möglichkeiten des Programms kennt und insbesondere, dass er mit den Grundlagen der finiten Elemente vertraut ist.

Die FMEA setzt dies eigentlich zwingend voraus, denn die Güte eines Entwurfs und damit die Standsicherheit eines Tragwerks hängen entscheidend von dem Verständnis des Tragwerksplaners für die Grundlagen der Statik und damit für die Grundlagen der Methode der finiten Elemente ab.

In diesem Dokument werden die daher die wesentlichen Eigenschaften der finiten Elemente dargestellt und die Punkte erörtert, die für den Tragwerksplaner wichtig sind, damit er zu einer vernünftigen Diskretisierung eines Tragwerks mit finiten Elementen kommt und lernt die FE-Ergebnisse richtig einzuschätzen.

## Stand sicherheitsnachweise mit finiten Elementen

Die Aufgabe des Tragwerksplaner ist es die Standsicherheit eines Gebäudes zu garantieren. In der Regel wird er die Statik mithilfe eines FE-Programms aufstellen. Mit entscheidend für die Qualität der Statik ist, dass der Aufsteller die Grenzen und die Möglichkeiten des Programms kennt und insbesondere, dass er mit den Grundlagen der finiten Elemente vertraut ist.

Die FMEA setzt dies eigentlich zwingend voraus, denn die Güte eines Entwurfs und damit die Standsicherheit eines Tragwerks hängen entscheidend von dem Verständnis des Tragwerkplaners für die Grundlagen der Statik und damit für die Grundlagen der Methode der finiten Elemente ab.

In diesem Dokument werden die daher die wesentlichen Eigenschaften der finiten Elemente dargestellt und die Punkte erörtert, die für den Tragwerksplaner wichtig sind, damit er zu einer vernünftigen Diskretisierung eines Tragwerks mit finiten Elementen kommt und lernt die FE-Ergebnisse richtig einzuschätzen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Stand sicherheitsnachweise mit finiten Elementen</b>	<b>3</b>
1.1	Was finite Elemente sind und nicht sind . . . . .	5
1.2	Vergleich des gerechneten Lastfalls mit dem eingegebenen Lastfall . . . . .	8
1.3	Adaptive Verbesserung . . . . .	10
1.4	Einflussfunktionen—der Schlüssel zu den finiten Elementen . . . . .	12
1.4.1	Beispiel Spannung . . . . .	14
1.4.2	Moment in einer Kragsscheibe . . . . .	14
1.4.3	Resultierende Schnittkraft in einer Wand . . . . .	14
1.5	Statik ist angewandte Kinematik . . . . .	14
1.6	Abklingverhalten . . . . .	19
1.7	Dipole und Monopole oder warum Querkräfte ungenauer sind als Momente . . . . .	20
1.8	Einflussfunktionen, die mit dem Abstand vom Aufpunkt wachsen . . . . .	24
1.9	Singularitäten . . . . .	24
1.10	Oszillierende Lagerkräfte . . . . .	27
1.11	Pollution . . . . .	28
1.12	Maxwell und die Folgen . . . . .	30
1.13	Das wahre Tragwerksmodell . . . . .	30
1.14	Ist 3-D genauer als 2-D? . . . . .	32
1.15	Hierarchie der Werte . . . . .	34
1.16	Zahlengläubigkeit . . . . .	35
1.17	Biege- und Diskontinuitätsbereiche . . . . .	37
1.18	Auskragende Bauteile . . . . .	38
1.19	Lagerkräfte . . . . .	39
1.20	Lagersteifigkeiten . . . . .	40

1.21	Ausrunden der Momente? . . . . .	41
1.22	Lagerkräfte von Scheiben . . . . .	42
1.23	Stützen . . . . .	48
1.24	Unterzüge . . . . .	48
1.25	Mängel in der Konstruktion . . . . .	52
	1.25.1 Ungewollte Einspannung in einer Platte . . . . .	52
	1.25.2 Knicke in der Einspannung . . . . .	52
1.26	Gleichgewicht . . . . .	52
1.27	Die Konsequenzen für die Statik . . . . .	58

# 1 Standsicherheitsnachweise mit finiten Elementen

Der Standsicherheitsnachweise von Tragwerken mittels finiten Elementen ist heute zwar gängige Praxis, aber die Unsicherheiten im Umgang mit den Ergebnissen einer FE-Berechnung sind immer noch sehr groß. In diesem Aufsatz wollen wir daher einige Bemerkungen zur Methode der finiten Elemente in der Baustatik machen.

Für einen schnellen Einstieg wird es sinnvoll sein, sich gleich auf die Fehler zu konzentrieren, die dabei gemacht werden können, weil so am schnellsten die Besonderheiten und Eigentümlichkeiten der Methode der finiten Elemente sichtbar werden.

Die Analyse eines Tragwerks beginnt damit, dass man sich ein Modell des Tragwerks macht. Dieses Modell sollte in der Lage sein, die wesentlichen Phänomene im Tragverhalten korrekt wiedergeben zu können. Die Überprüfung, ob das Modell dem Tragwerken adäquat ist, wollen wir *Validierung* nennen.

Um das Modell zu analysieren, benutzt der Tragwerksplaner ein FE-Programm, Auch dabei können Fehler auftreten. Die Überprüfung, ob das Modell von dem FE-Programm richtig berechnet wurde, wollen wir *Verifizierung* nennen.

- Validierung = Ist das statische Modell adäquat?
- Verifizierung = Gibt es numerische Fehler?

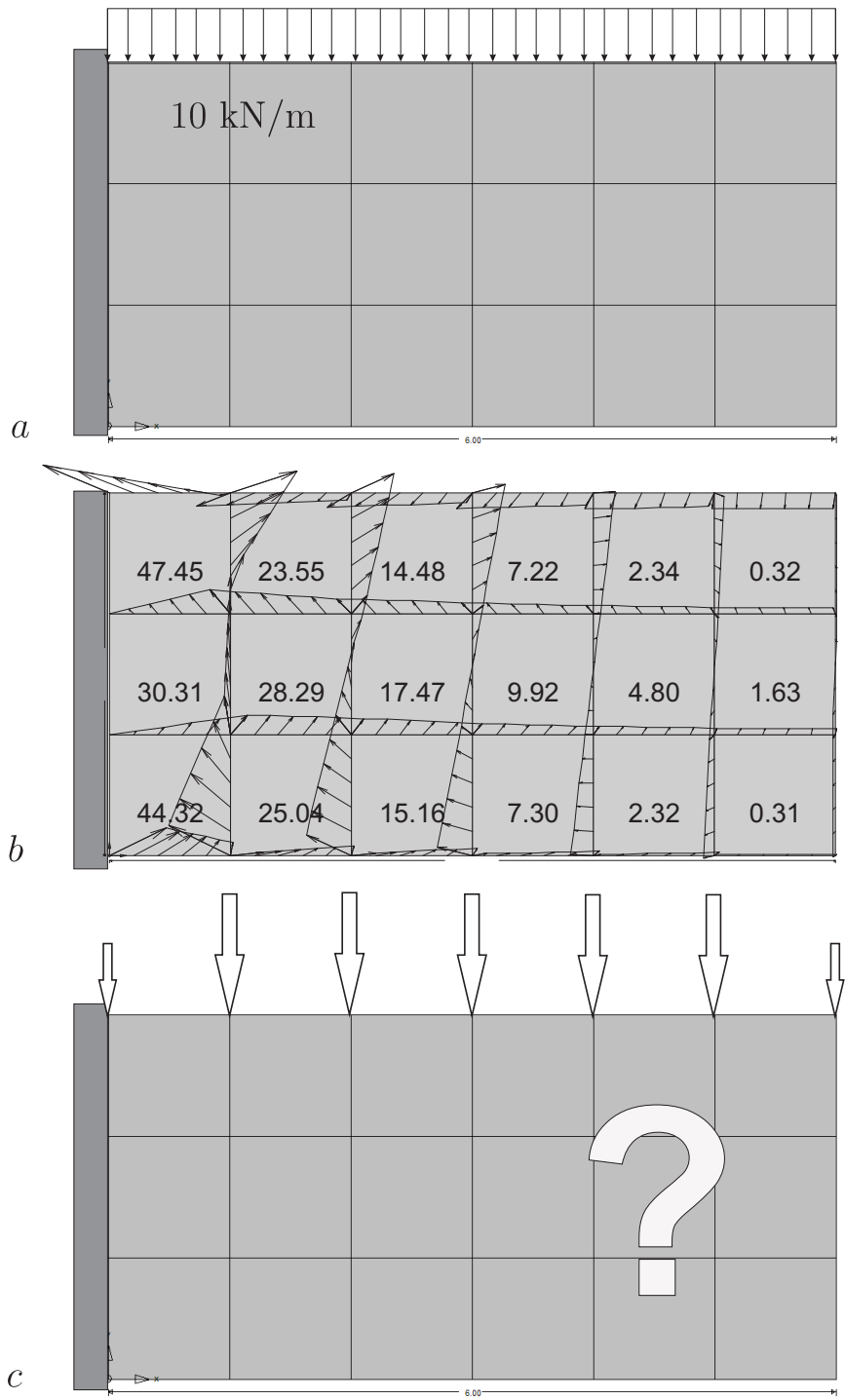
Beide Fehler lassen sich, und das ist die Linie, die dieser Aufsatz verfolgt, auf einen Fehler: den Fehler in den maßgebenden Einflussfunktionen zurückführen.

Rechentechisch stellen die Werte von Einflussfunktionen Fortleitungszahlen dar. Eine Last drückt hier auf das Tragwerk und die Frage ist, was kommt davon als Querkraft in einem Bemessungsschnitt an?

Wenn hier bei der Modellbildung Fehler gemacht werden, Steifigkeiten falsch angesetzt werden, dann stimmt der Informationsfluss zwischen Aufpunkt und Lastangriffspunkt nicht, dann ist die Fortleitungszahl falsch und dann sind auch die Schnittkräfte falsch—auch wenn das FE-Programm richtig rechnet.

Angenommen das Modell ist richtig, das Modell kann die Kinematik des Originaltragwerks in den wesentlichen Zügen richtig abbilden. Dann gibt es immer noch Fehler, weil das FE-Programm die Einflussfunktionen, die zu dem Modell gehören, nicht richtig approximieren kann. Denn das handicap der finiten Elemente ist ihre *beschränkte Kinematik*, sind ihre ungelenkten Verformungen. Deswegen sind die FE-Ergebnisse falsch.

- Modellfehler = falsche Einflussfunktionen



### Knotenkräfte sind eine Fiktion

Abbildung 1: 1. Beispiel: Berechnung einer Scheibe mit finiten Elementen: **a)** Der Originallastfall  $p$ ; **b)** der FE-Lastfall  $p_h$ , das ist der Lastfall, den das Programm rechnet; **c)** Knotenkräfte—sie sind nur ein Modell 'als ob'. In Wirklichkeit gibt es sie nicht.

- Numerischer Fehler = fehlerhafte (ungelenke) Einflussfunktionen

Und die Fehler sind hintereinander geschaltet. Erst werden durch den Übergang vom Tragwerk zum Modell die wahren Einflussfunktionen reduziert, und diese schon vereinfachten Einflussfunktionen können sich auf dem FE-Netz aufgrund der fehlenden Beweglichkeit der Elemente nicht richtig ausbilden. *Diese Dinge sind weitgehend unbekannt.*

Bauingenieure sehen die finiten Elemente immer noch so, wie die Ingenieure bei Boeing, die die Methode zum ersten Mal einsetzten und dabei mit Knotenkräften und Knotenverformungen operierten. Dieses Knotenkraft-Modell ist sehr suggestiv, aber es ist doch nötig, leichte Korrekturen an diesem Modell anzubringen, wenn man mit den finiten Elementen in der Statik weiterkommen will.

## 1.1 Was finite Elemente sind und nicht sind

Viele Ingenieure verstehen die Analyse einer Kragsscheibe wie in Bild 1 a mit finiten Elementen in etwa wie folgt:

Die Kragsscheibe wird in einzelne Scheibenelemente zerlegt, die an den Knoten zusammenhängen und die Streckenlast wird, passend hierzu, durch Knotenkräfte ersetzt. Anschließend werden, ähnlich wie bei einem Fachwerk, an jedem Knoten die Gleichgewichtsbedingungen formuliert und so findet man die Verformungsfigur, die zu der FE-Scheibe gehört.

Aber dieses Modell ist nur ein *Modell als ob*, denn wenn in den Knoten der Scheibe wirklich Knotenkräfte angreifen würden, dann hätten die immens hohen Spannungen unter den Knotenkräften das Material schon lange zum Fließen gebracht und die Knoten wären mitsamt den Knotenkräften vom Bildschirm verschwunden.

Dieses Modell ist sehr populär, man findet es in sehr vielen Büchern über finite Elemente. Man kommt mit diesem Modell scheinbar sehr schnell in die Methode der Finiten Elemente hinein, aber leider nicht sehr viel weiter. Sprechen wir es deutlich aus:

- Die finiten Elemente hängen nicht nur an den Knoten zusammen.
- Die Knotenkräfte sind eine Fiktion, sie gibt es nicht.

Ja, wagen wir uns noch einen Schritt weiter vor, die ganze Interpretation, dass man eine Scheibe in kleine Scheibenelemente zerlegt ist fragwürdig. Sie ist anschaulich, das ja, aber sie führt den, der nicht das nötige Hintergrundwissen hat, eher in die Irre.

Die Scheibenelementen sind eigentlich mathematische Konstrukte und keine mechanischen Elemente. Sie dienen nur dazu, auf der Scheibe stückweise Interpolationspolynome zu konstruieren, mit denen man die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Scheibe,  $u_x$  und  $u_y$ , das sind ja für sich genommen jeweils Flächen, facettenartig approximieren kann. So ähnlich, wie man eine glatte Kurve durch einen Polygonzug approximieren kann. Wenn natürlich auch die Interpretation als Scheibenelemente im statischen Sinne nahe liegt und sich kaum ein Ingenieur dieser Suggestion entziehen kann.

In der Stabstatik ist diese Interpretation legitim. Im Reich der Stäbe und Balken kann man die finiten Elemente wirklich als kleine Stab- und Balkenelemente interpretieren. In der

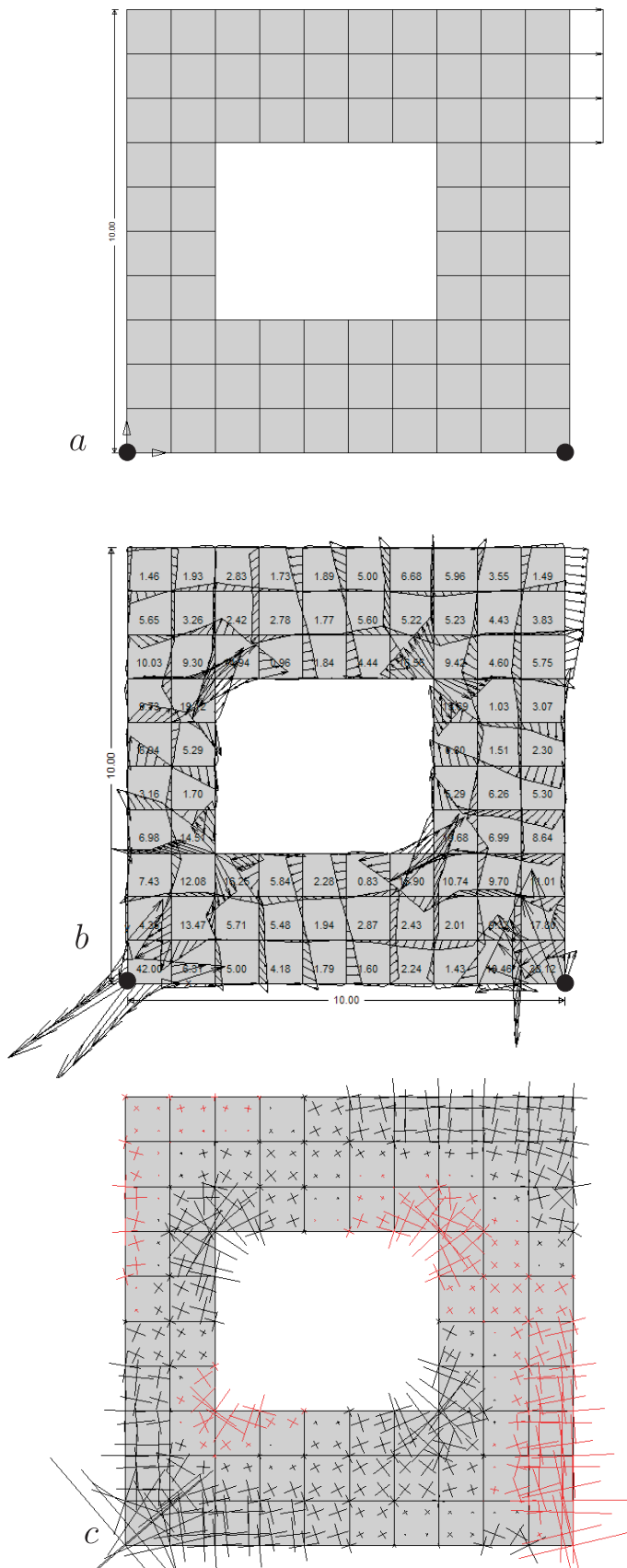


Abbildung 2: 2. Beispiel: FE-Analyse einer Scheibe: **a)** die Scheibe mit der Belastung. **b)** Die Lasten, die der FE-Berechnung zu Grunde liegen, haben scheinbar wenig mit der Originalbelastung zu tun. **c)** aber die Spannungen glaubt man sofort und der Anwender ahnt auch nicht, dass sie eigentlich auf dem Lastfall in Bild b beruhen.

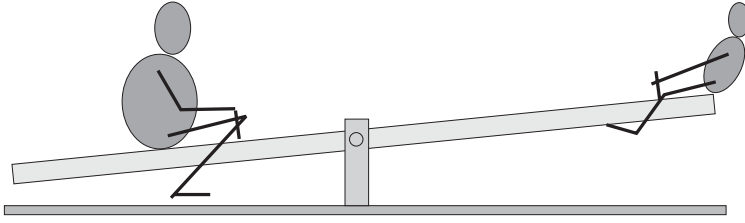


Abbildung 3: Vater und Sohn leisten bei jeder Drehung der Schaukel die gleiche Arbeit. Sie sind einander energetisch äquivalent. Das ist der Grundgedanke der finiten Elemente.

Stabstatik gibt es wirklich Knotenkräfte und Knotenmomente. Aber die Stabstatik ist eben ein Sonderfall, die Übertragung dieses Modells auf Flächentragwerke ist nicht zulässig.

- Knotenkräfte sind auf Stabtragwerke beschränkt.

Der Lastfall, den das FE-Programm wirklich rechnet, ist in Bild 1 b dargestellt. Wir nennen ihn im Folgenden den Lastfall  $p_h$  im Unterschied zum Originallastfall, den wir  $p$  nennen (unabhängig davon, ob es ein LF  $g$  oder ein Verkehrslastfall ist). In dem Lastfall  $p_h$  wirken längs den Elementkanten Linienkräfte und in den Elementen Flächenkräfte, ähnlich dem Eigengewicht, die die Scheibe nach unten drücken. Die Größe dieser Flächenkräfte erkennt man nur an den Zahlen in den Elementen. Diese Zahlen sind das Gesamtgewicht der Flächenkräfte pro Element.

Das FE-Programm hat den Lastfall  $p_h$  so eingestellt, dass er *arbeitsäquivalent*, 'wackeläquivalent' zu dem Originallastfall ist. Wackeläquivalent meint, dass, wenn wir an der Scheibe wackeln, wenn wir also die Knoten des FE-Netzes in beliebige Richtungen verschieben, die virtuellen Arbeiten, die die Originalbelastung bzw. die Ersatzbelastung auf diesen Wegen leisten, gleich sind.

Ein Prüfenieur, der erst an der realen Scheibe mit der Originalbelastung wackeln würde und danach an der FE-Scheibe mit der Ersatzbelastung, würde keinen Unterschied feststellen, wenn—und das ist der entscheidende Punkt (!)—wenn die virtuelle Verrückung eine der möglichen Knotenverschiebungen der FE-Scheibe wäre.

Wenn er aber als virtuelle Verrückungen eine Sinus-Welle wählen würde, die sich ja durch die eckigen, polygonzugartigen Elementverformungen nicht exakt wiedergeben lässt, dann würde er stutzig werden, weil die virtuellen Arbeiten der beiden Lastfälle bezüglich der Sinuswelle nicht gleich sind.

In dieser Beschränkung, der Äquivalenz der beiden Lastfälle  $p$  und  $p_h$  nur hinsichtlich der Knotenverschiebungen, liegt der Näherungscharakter der finiten Elemente.

- Wenn man ein Tragwerk mit finiten Elementen berechnet, dann wird der Originallastfall durch einen arbeitsäquivalenten Lastfall ersetzt.

Das Beispiel von Vater und Sohn auf der Schaukel in Bild 3, so einfach wie es ist, drückt den Äquivalenzgedanken sehr schön aus. Vater und Sohn haben nicht dasselbe Gewicht, aber bei jeder Drehung der Schaukel leisten Vater und Sohn dieselbe Arbeit, weil der Sohn das, was ihm an Gewicht fehlt, durch Hebelarm ersetzt. Vater und Sohn sind bezüglich aller möglichen Drehungen der Schaukeln einander äquivalent, weil sie bei jeder Drehung der Schaukel

dieselbe Arbeit leisten.

So, wie wir durch das Hochwerfen mit der Hand Steine auf ihr Gewicht testen, so sagt ein FE-Programm zwei Lasten sind gleich, wenn sie bei jeder virtuellen Verrückung der Knoten die gleiche Arbeit leisten.

Ein FE-Programm begeht daher nach seiner Meinung keinen Fehler, wenn es die Randbelastung in Bild 1 a durch eine arbeitsäquivalente Belastung  $p_h$ , die Linien- und Flächenkräfte in Bild 1 b ersetzt. Bezogen auf sein (beschränktes) Sensorium, d.h. die Menge aller Knotenverschiebungen, die auf dem Netz möglich sind, sind die beiden Lastfälle ja äquivalent, einander gleich. Bei jedem Wackeln an der Scheibe sind die Arbeiten ja immer gleich groß, also sind sie doch einander äquivalent, sind sie identisch...

In der klassischen Statik sind zwei Lastfälle  $p$  und  $p_h$  gleich, wenn die Lasten in jedem Punkt übereinstimmen (starkes Gleichheitszeichen). In der FE-Statik gelten sie als gleich, wenn sie bei gleichen virtuellen Verrückungen gleiche Arbeiten leisten. Das ist das so genannte schwache Gleichheitszeichen.

FE-Statik ist somit im gewissen Sinne eine 'Wackelstatik', womit aber nichts über die Qualität der Finiten Elemente gesagt sein, denn auch die Natur findet die Gleichgewichtslagen eines Tragwerkes durch Wackeln. Nur fährt die Natur unendlich viele Tests, verwendet sie unendlich viele virtuelle Verrückungen, während ein FE-Programm sich notwendigerweise bescheiden muss. Sein Sensorium ist beschränkt. Es weiß nichts davon, dass es auch Sinuswellen gibt.

Dieser Tausch,  $p \rightarrow p_h$ , das Ersetzen des Originallastfalls durch einen arbeitsäquivalenten Lastfall, ist übrigens *der einzige Fehler*, den ein FE-Programm macht und diesen Fehler begeht es gleich am Anfang. Aber alles was danach kommt, ist klassische Statik, ist Statik im Sinne des Regelwerks. Die Schnittkräfte, die Verformungen alles ist exakt. Nur ist es eben ein anderer Lastfall. Und für diesen Lastfall bemisst der Tragwerksplaner das Tragwerk. Der Tragwerksplaner glaubt die Spannungen, die er auf dem Bildschirm sieht, gehörten zu dem Lastfall in Bild 2 a. In Wirklichkeit gehören sie aber zu dem Lastfall in Bild 2 c.

## 1.2 Vergleich des gerechneten Lastfalls mit dem eingegebenen Lastfall

Wenn aber das FE-Programm den Originallastfall durch einen arbeitsäquivalenten Lastfall ersetzt, dann kann man doch eine FE-Berechnung ganz einfach dadurch kontrollieren, dass man den FE-Lastfall mit dem Originallastfall vergleicht: Was sollte gerechnet werden und welchen Lastfall hat das Programm wirklich gerechnet?

Die FE-Programme bieten diese Prüfung in der Regel aber nicht an. Dies hat zwei Ursachen: Die Benutzer wissen in der Regel nicht, dass es diese Möglichkeit gibt und die Programm-  
autoren haben kein Interesse daran, weil sie dann dem Anwender erklären müssten, warum das FE-Programm anscheinend einen 'falschen' Lastfall löst, der noch dazu anscheinend wenig mit dem Originallastfall zu tun hat. Jeder Anwender, der mit der Theorie der finiten Elemente nicht vertraut ist, würde den Glauben an die finiten Elemente verlieren und die Programmhersteller einen guten Kunden...

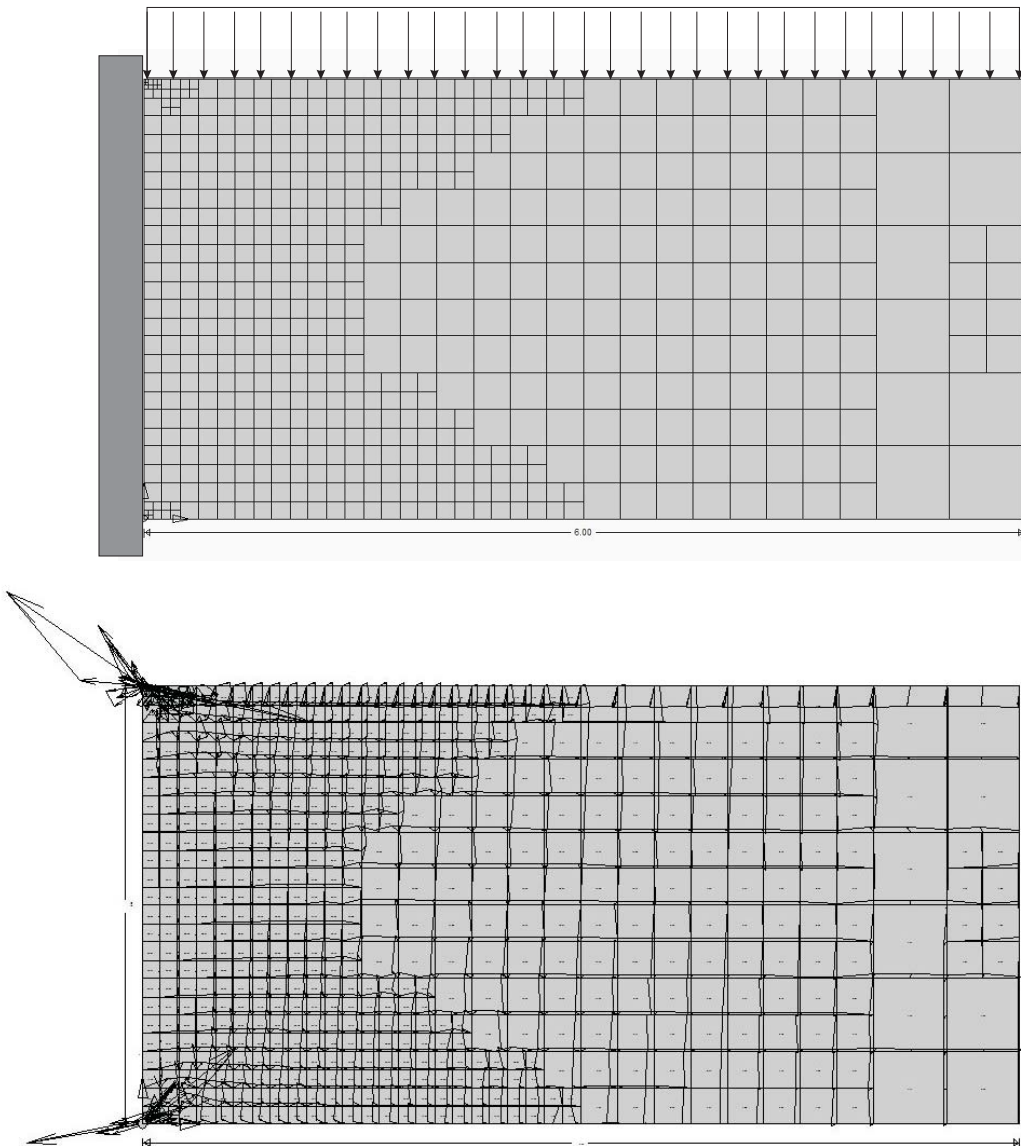


Abbildung 4: Adaptive Verfeinerung des Netzes. **a)** Das Netz wurde dort verfeinert, wo die Abweichung des Lastfalls  $p_h$  vom Lastfall  $p$  groß war **b)** der FE-Lastfall  $p_h$  auf dem verfeinerten Netz. In den Ecken gibt es nach der Elastizitätstheorie singuläre Spannungen. Die beginnen sich hier abzuzeichnen.

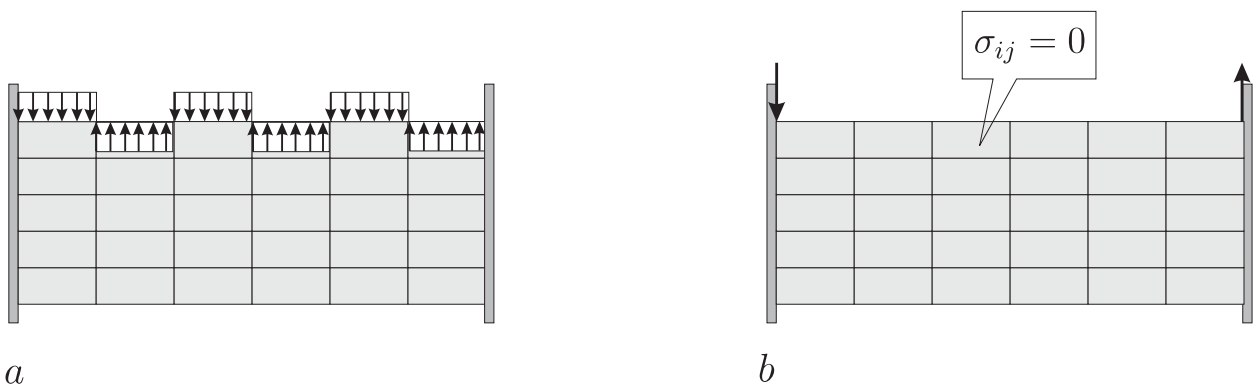


Abbildung 5: Scheibe: **a)** System und Belastung; **b)** bis auf die Lagerknoten sind alle äquivalenten Knotenkräfte Null.

Zur Ehre der Programmautoren muss jedoch gesagt werden, dass sie an dieser Situation eigentlich keine Schuld tragen. Zu einem guten Teil hat das Problem mit der Unkenntnis der Anwender zu tun. Die meisten Anwender wissen eigentlich nicht, was finite Elemente sind. Sie extrapolieren aus ihren Erfahrungen mit der Stabstatik auf die Flächentragwerke und erwarten nun, dass ihnen die FE-Programme ähnlich schöne Ergebnisse auch für Scheiben und Platten liefern. Aber das sind zwei verschiedene Welten: Das eine sind Stabtragwerken, und das andere sind Flächentragwerke.

- Es gehört sehr viel Erfahrung und Hintergrundwissen dazu, die FE-Ergebnisse bei Flächentragwerken richtig zu interpretieren.

### 1.3 Adaptive Verbesserung

Wenn man aber den FE-Lastfall  $p_h$ , also die Lasten in Bild 1 b, mit dem ursprünglichen Lastfall  $p$ , der Streckenlast in Bild 1 a vergleichen kann, dann liegt es nahe, die Elemente dort kleiner zu machen, wo die Abweichungen zwischen  $p$  und  $p_h$  groß sind, s. Bild 4. Auf diese Art und Weise kann man die Übereinstimmung zwischen den beiden Lastfällen  $p$  und  $p_h$  verbessern. Man nennt dies *adaptive Verfeinerung* des Netzes. Ein FE-Programm ist also gewissermaßen in der Lage sich (innerhalb gewisser Grenzen) selbst zu kontrollieren. Adaptive Verfahren werden in der Luft- und Raumfahrt schon seit längerer Zeit angewandt. Warum dann nicht auch im Bauwesen?

Andererseits darf man sich von dieser Option keine Wunder erwarten. Die Singularitäten in den Ecken lassen sich damit nicht beseitigen. Ja es ist sogar so, dass die Spannungen immer größer werden, je feiner man das Netz in der Nähe einer solchen singulären Ecke macht. Für die Ecke selbst gewinnt man also gar nichts, aber ihr negativer Einfluss auf die Genauigkeit der FE-Ergebnisse im Feld, in den abliegenden Punkten, lässt sich doch deutlich verringern. Denn anders als viele Anwender meinen, beeinflussen solche singulären Stellen auch die Genauigkeit im Feld (pollution).

Dazu kommt ein zweites. Bei einer adaptiven Verfeinerung eines Netzes werden sehr schön die kritischen Stellen, die *hot spots* sichtbar, s. Bild 6 a. Der Tragwerksplaner lernt das Tragwerk besser kennen. Mit etwas Routine ist man dann bald in der Lage vorausszusagen, wo das Programm das Netz adaptiv verfeinern wird, aber für den Anfänger, der blind dem FE-Programm vertraut, hat die adaptive Verfeinerung einen wertvollen didaktischen Nebeneffekt.

Bei einer neuen Variante, der so genannten *zielorientierten Verfeinerung*, s. Bild 6 b, kann man das Netz gezielt so verfeinern, dass ein spezieller Wert—hier die vertikalen Spannung  $\sigma_{yy}$ —auf dem Netz möglichst genau ermittelt wird.

*Bemerkung:* Der nahe liegende Gedanke, einfach die Differenz der Lasten,  $p - p_h$ , noch einmal auf das Tragwerk aufzubringen, diesen Lastfall zu lösen, usw., funktioniert mit finiten Elementen nicht, weil die FE-Methode ein *Projektionsverfahren* ist, [8]. Unter den Lasten  $p - p_h$  verformt sich die Scheibe nicht. Es gibt Lastfälle, die kann man auf einem Netz nicht lösen, das heißt sie rufen keine Verformungen, keine Spannungen hervor, s. Bild 5. Der Lastfall  $p - p_h$  ist ein solcher Lastfall. Eine Verbesserung kann man daher nur erzielen, wenn man das Netz verfeinert.

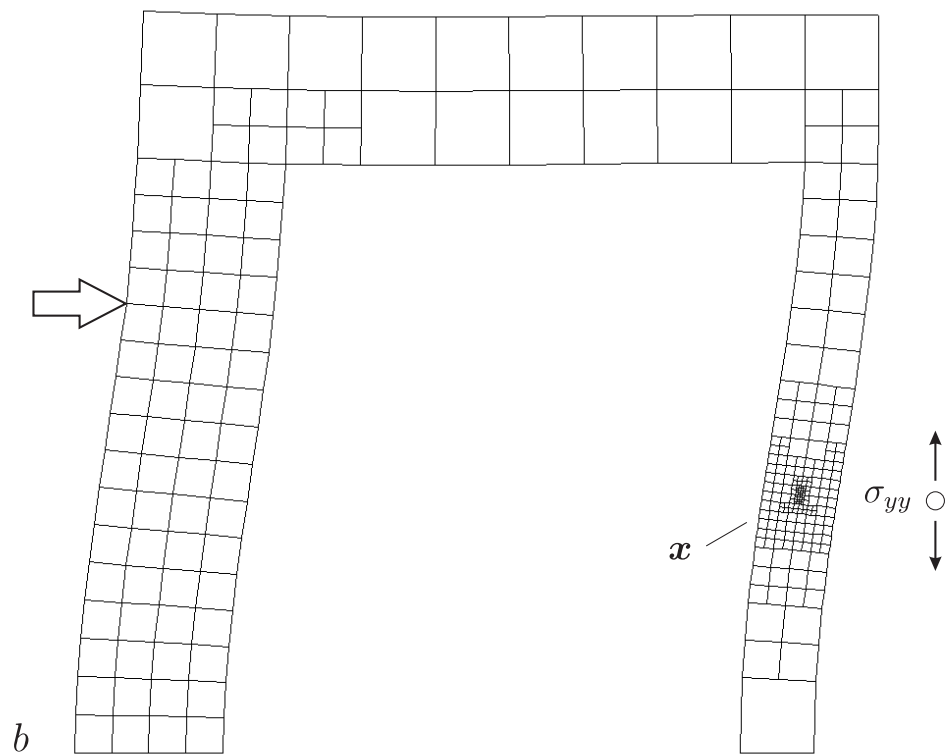
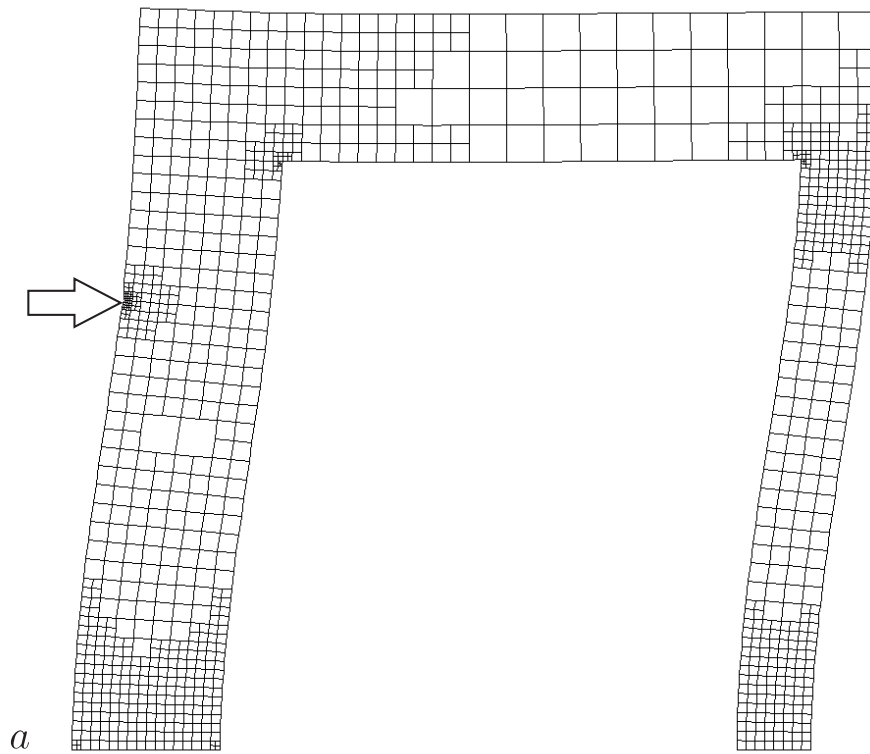


Abbildung 6: Adaptive Verfeinerung **a)** Standard **b)** zielorientierte Verfeinerung, [9]

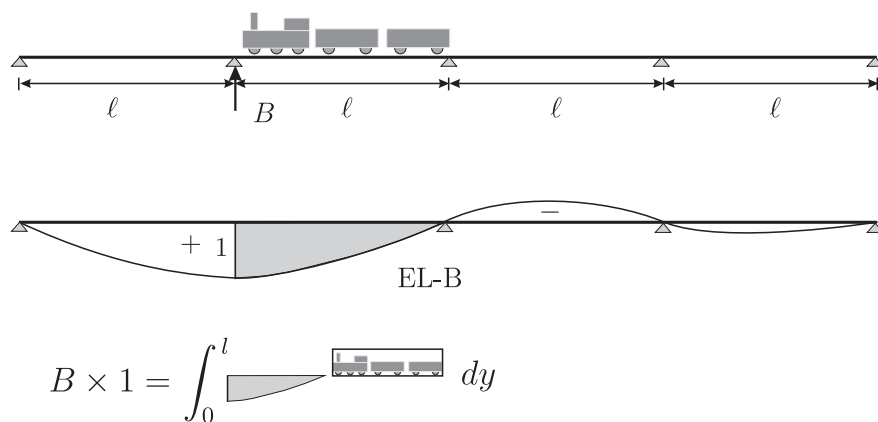


Abbildung 7: Ermittlung der Lagerkraft  $B$  mittels der Einflussfunktion (oder Einflusslinie, EL) für das Lager

## 1.4 Einflussfunktionen—der Schlüssel zu den finiten Elementen

Die Einflussfunktionen sind der Schlüssel zur Statik und auch zu den finiten Elementen, denn es gilt der zentrale Satz:

- In der linearen Statik berechnet ein FE-Programm alle Spannungen, alle Auflagerkräfte, alle Verformungen mittels Einflussfunktionen.

Und weil die Beweglichkeit eines FE-Netzes eingeschränkt ist, ist ein FE-Programm gezwungen genäherte Einflussfunktionen zu verwenden. *Das ist der einzige Grund, warum FE-Ergebnisse falsch sind.*

Der Tragwerksplaner ermittelt die Auflagerkraft  $B$  für einen Brückenpfeiler

$$B = \int_0^l \eta(x) p(x) dx \quad (1)$$

indem er die Streckenlast  $p$  mit der Einflussfunktion  $\eta(x)$  für die Auflagerkraft überlagert, s. Bild 7. Die Einflussfunktion ist die Biegelinie der Brücke die entsteht, wenn das Innenlager entfernt wird und die Brücke an dieser Stelle um eine Längeneinheit nach unten gedrückt wird.

Genau so geht auch eine FE-Programm vor. Sein Problem ist nur, dass seine Einflussfunktion falsch ist oder, milder ausgedrückt, nur annähernd richtig ist.

Denn dadurch, dass die Brücke in finite Elemente unterteilt wird, *verliert sie an Beweglichkeit*, wird sie ungenau und als Folge hiervon wird sich nicht die korrekte Biegelinie ausbilden, wenn das Lager um eine Längeneinheit abgesenkt wird.

- Die FE-Ergebnisse sind nur Näherungen, weil die eingeschränkte Kinematik der finiten Elemente nicht die korrekte Ausbildung der Einflussfunktionen erlaubt.

Welche Konsequenzen diese elementare Tatsache für die tägliche Arbeit mit finiten Elementen hat, wollen wir an drei kleinen Beispielen erläutern.

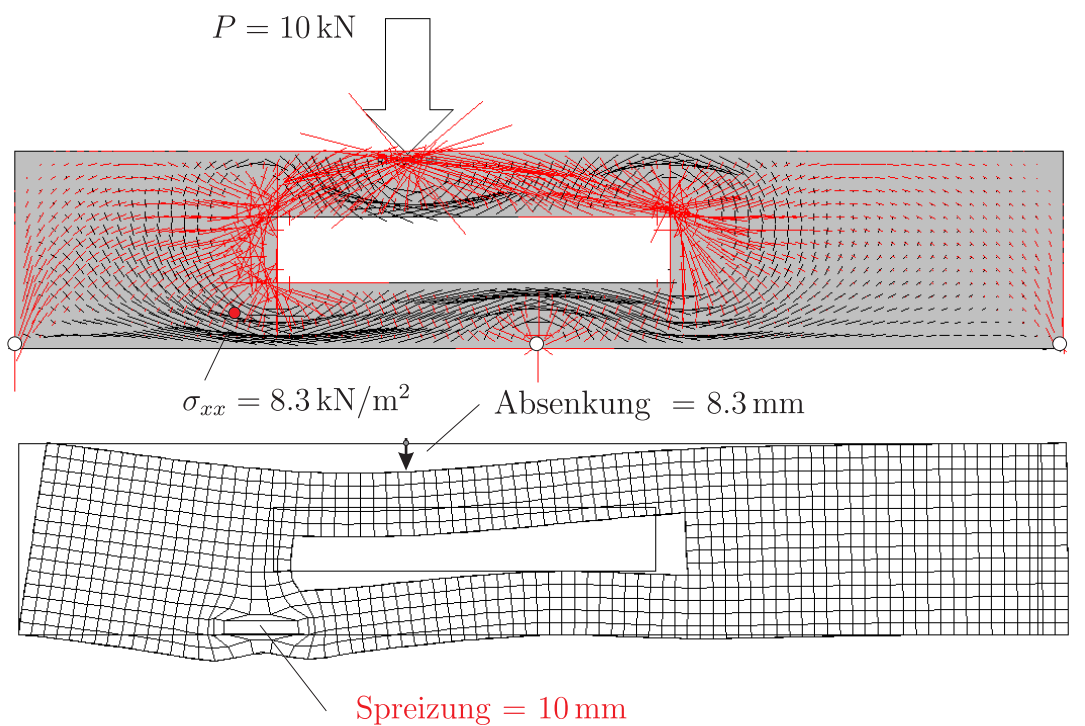
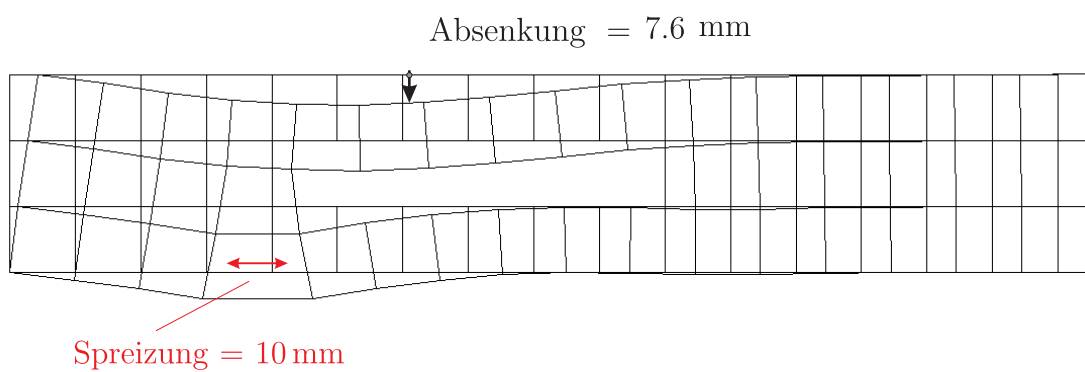
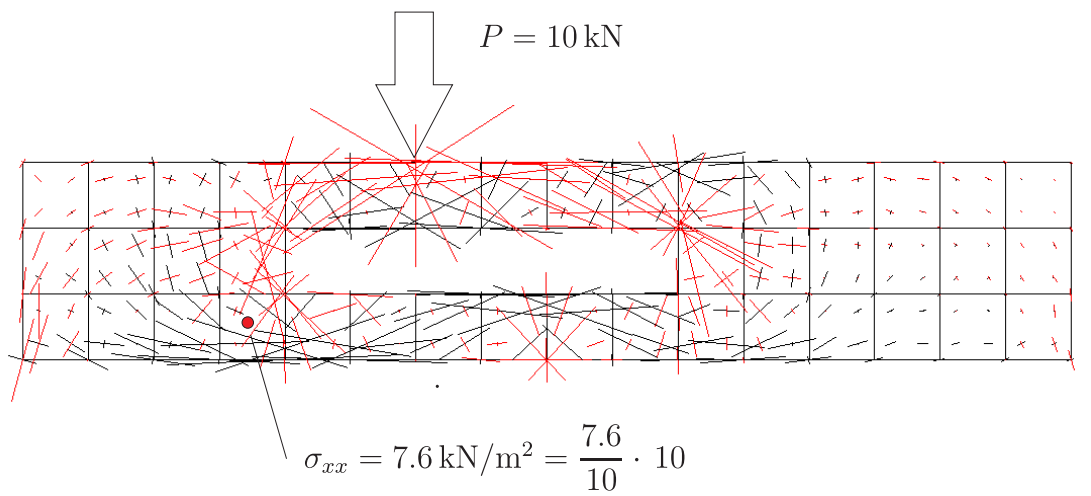


Abbildung 8: Eine Versetzung von 10 mm im Aufpunkt ruft in dem FE-Modell eine vertikale Verschiebung von 7,6 mm im Fusspunkt der Belastung hervor. Also ist die Spannung im Aufpunkt gleich  $7,6/10 \times 10 = 7,6 \text{ kN/m}^2$ . Auf dem verfeinerten Netz wird die vertikale Verschiebung größer und daher wächst die Spannung auf  $8,3/10 \times 10 = 8,3 \text{ kN/m}^2$ .

### 1.4.1 Beispiel Spannung

Die Scheibe in Bild 8 wird an ihrem oberen Rand durch eine Einzelkraft belastet. Wie groß ist die dadurch hervorgerufene horizontale Spannung in dem markierten Punkt im unteren Teil der Scheibe? Das FE-Programm berechnet diese Spannung, wie alle anderen Werte auch, mittels der zugehörigen Einflussfunktion. Die Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  ist die Verformungsfigur der Scheibe, wenn der Aufpunkt um 10 mm gespreizt wird. Was in dem FE-Modell von dieser Spreizung an der oberen Kante, im Fußpunkt der Kraft ankommt, hängt von der Zahl und der Größe der gewählten Elemente ab. Bei der hier gewählten, relativ groben Vernetzung, bewegt sich der Fußpunkt der Last um 7.6 mm vertikal nach unten und somit kommt das FE-Programm auf einen Wert von

$$\sigma_{xx} = \frac{7.6}{10} \cdot P \quad (2)$$

für die Spannung. Wenn man das Netz feiner wählt, dann wächst die Verformung (= Einflusskoeffizient) an und damit auch die Spannung.

### 1.4.2 Moment in einer Kragsscheibe

Ein Beispiel bei dem der Fehler wesentlich größer ist, ist die Kragsscheibe in Bild 9 a. Das exakte Biegemoment im Schnitt  $A - A$  beträgt 2,5 kNm. Das FE-Programm kommt nur auf einen Wert von 1,66 kNm. Der Grund ist, dass auf dem FE-Netz die exakte Einflussfunktion für das Biegemoment, s. Bild 9 b, nicht darstellbar ist. Wenn das FE-Programm versucht, den Schnitt  $A - A$  um  $45^\circ$  zu drehen, wie es Vorschrift ist, dann hebt sich das Kragarmende nur um 1,66 m und nicht, wie es richtig wäre, um 2,5 m.

### 1.4.3 Resultierende Schnittkraft in einer Wand

Ähnlich krass ist der Fehler bei dem nächsten Beispiel. Die Wandscheibe in Bild 10 wird oben links mit einer Kraft von 1 kN belastet. Das FE-Programm kommt jedoch im Schnitt  $A - A$  auf einen Wert von 2,09 kN für die resultierende horizontale Schnittkraft ( $N_{yx}$ ). Der Grund für diesen großen Fehler ist, dass das FE-Programm mit einer falschen Einflussfunktion arbeitet. Die exakte Einflussfunktion für die Schnittkraft ist eine Verschiebung des ganzen oberen Teils gleichmäßig um 1 cm nach rechts, s. Bild 10 b. Auf dem FE-Netz kann diese Bewegung aber nicht dargestellt werden, weil ein solcher Verschiebungssprung, denn darum handelt es sich ja, wenn der obere Teil zur Seite gleitet, auf einem FE-Netz nicht darstellbar ist. Das FE-Programm bemüht sich zwar diese Bewegung darzustellen, aber es gelingt ihm nur die 'Pseudo'-Einflussfunktion in Bild 10 c zu erzeugen, bei der sich die obere linke Ecke um 2,09 cm nach rechts bewegt.

Es ist nur konsequent und in sich stimmig, wenn das FE-Programm dann im Schnitt  $A - A$  die Schnittkraft zu 2,09 kN berechnet

$$N_{yx} = \text{Einflusskoeffizient} \times 1 \text{ kN} = 2,09 \times 1 \text{ kN} = 2,09 \text{ kN}. \quad (3)$$

Die Logik ist richtig, aber das Ergebnis ist falsch.

## 1.5 Statik ist angewandte Kinematik

Wir rühren hier an eine Grundtatsache der Statik:

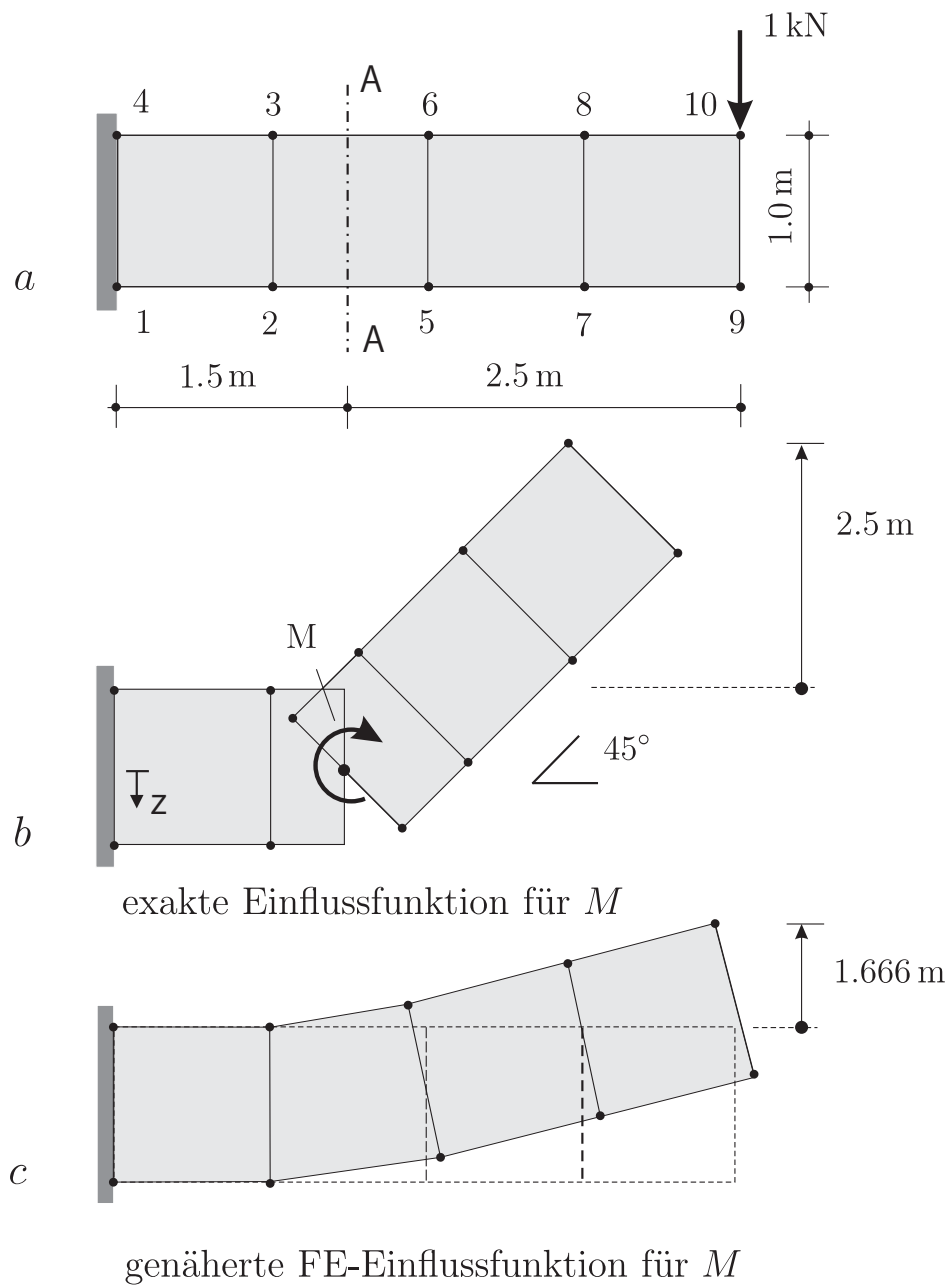


Abbildung 9: **a)** Kragstange; **b)** exakte Einflussfunktion für das Biegemoment  $M$ ; **c)** FE Näherung

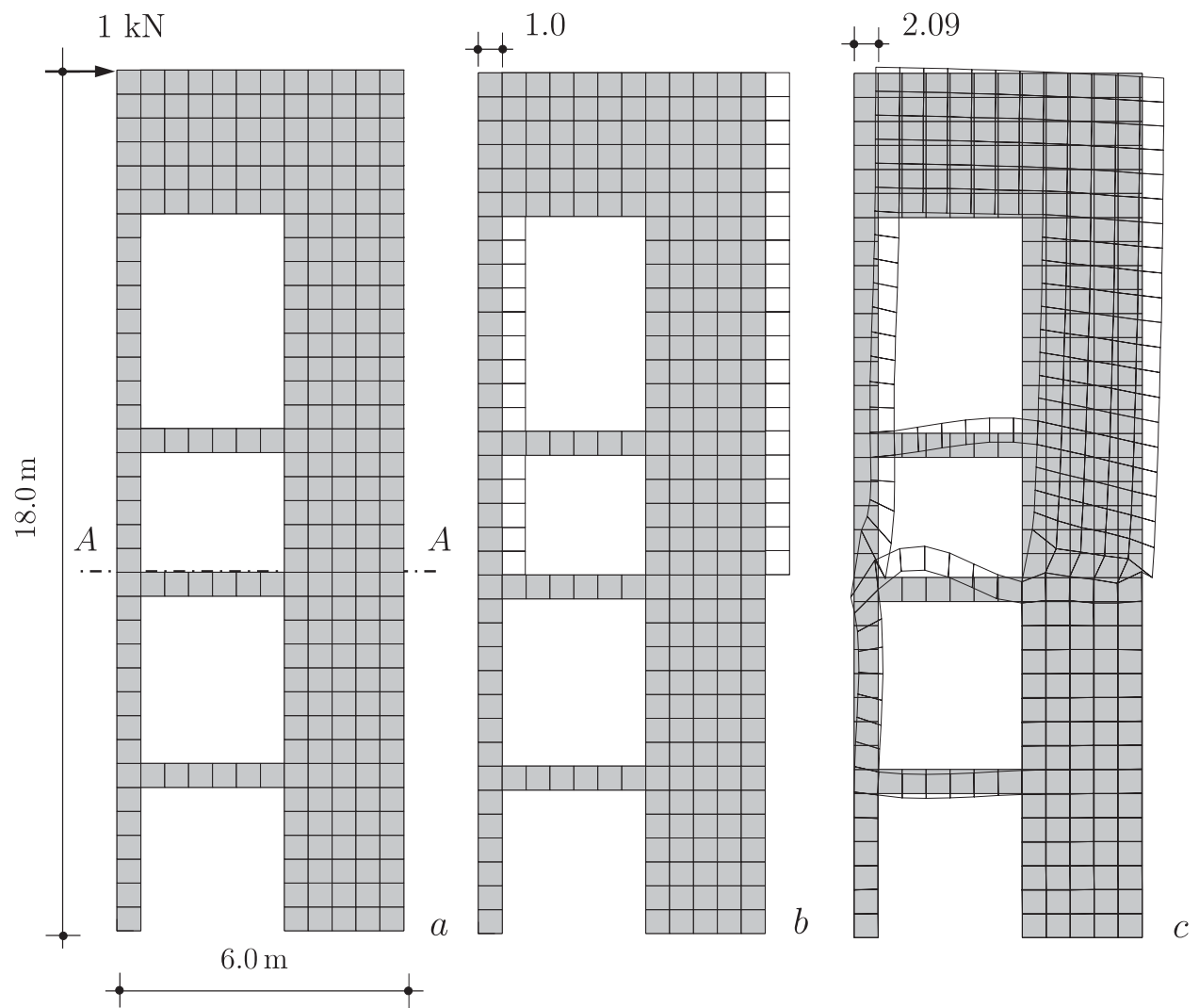


Abbildung 10: Wandscheibe: **a)** Schnitt A – A, **b)** exakte Einflussfunktion für  $N_{yx}$  im Schnitt A – A, **c)** FE Näherung

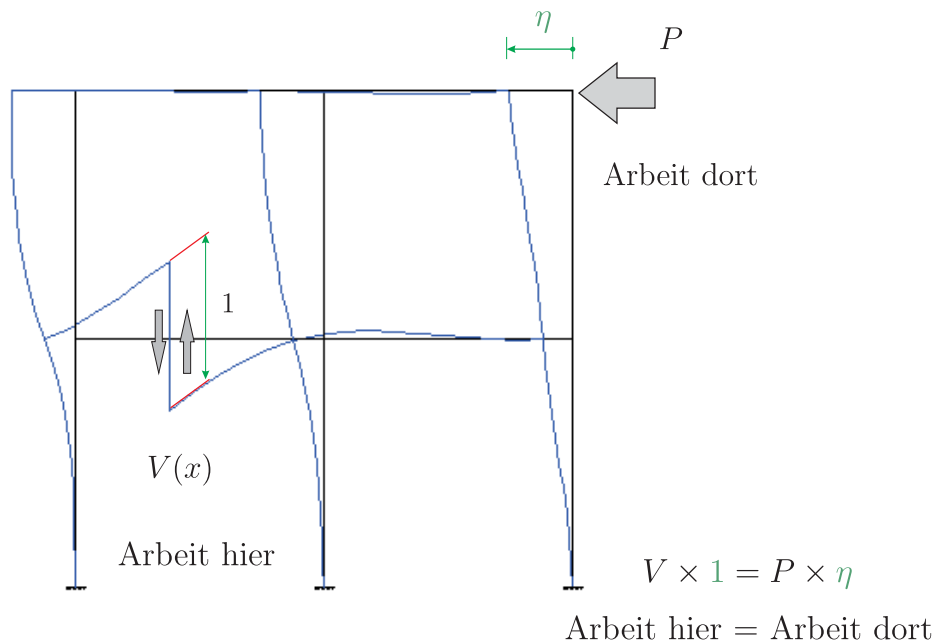


Abbildung 11: Jede Einflussfunktion gleicht einer Schaukel. Die Arbeiten auf beiden Seiten der Schaukel müssen gleich groß sein. So stellen sich die Schnittkräfte ein.

- Statik ist nicht 'statisch', sie ist angewandte Kinematik.

Nirgendwo wird dies deutlicher als beim Einsatz der finiten Elemente in der Statik.

Ein Tragwerk besteht aus unendlich vielen Momenten-, Normalkraft- und Querkraftgelenken. Alle diese Gelenke sind gesperrt. Aber wenn man ein solches Querkraftgelenk löst, s. Bild 11 a, und dadurch eine Bewegung in das Tragwerk hineinträgt, dann ist die Arbeit, die von der Wanderlast und von den Kräften am Gelenk dabei geleistet werden, gleich groß. An dem einen Ende der 'Schaukel' sitzen - im übertragenen Sinne - die beiden gegengleichen Gelenkkräfte<sup>1</sup> und am anderen Ende der Schaukel sitzt die Wanderlast und beide, die Gelenkkräfte und Wanderlast, leisten bei der 'Drehung' der Schaukel die gleiche Arbeit wie Vater und Sohn in Bild 3.

Das, was von der Spreizung des Querkraftgelenks im Fußpunkt der Wanderlast ankommt, ist umgekehrt gleich dem Einfluss, den die Wanderlast auf die Querkraft im Aufpunkt hat.

Die ganze Strecke zwischen dem Querkraftgelenk und dem Fußpunkt der Wanderlast muss daher, wenn die richtige Botschaft im Fußpunkt der Wanderlast ankommen soll, richtig modelliert werden. Wenn hier Fehler gemacht werden, die Steifigkeiten zu hoch oder zu niedrig sind, dann ist die Übertragungsstrecke zwischen dem Querkraftgelenk und dem Fußpunkt der Wanderlast gestört und dann wird umgekehrt, aufgrund der Reziprozität, der Einfluss der Wanderlast auf die Querkraft falsch abgeschätzt.

- Die Fortleitungszahlen müssen stimmen.

Die korrekte Modellierung eines Tragwerks entscheidet sich hier.

<sup>1</sup>Weil sie jeweils anteilige Wege gehen zählen sie wie eine Kraft

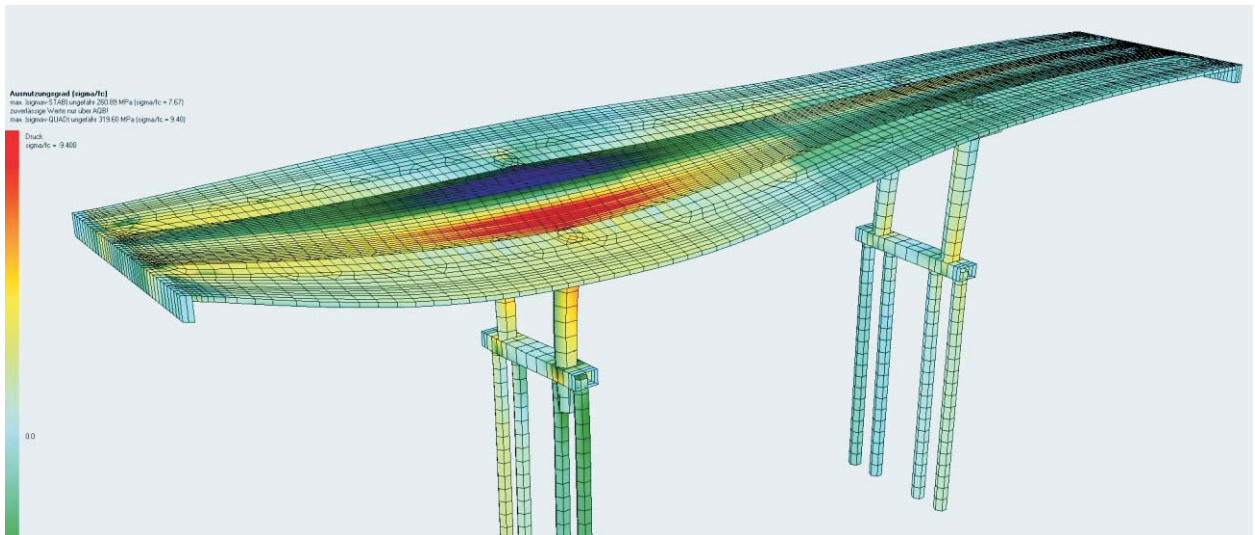


Abbildung 12: Einflussfunktion für die Normalkraft im vorderen Pfeiler einer Brücke auf Bohrfählen [13]

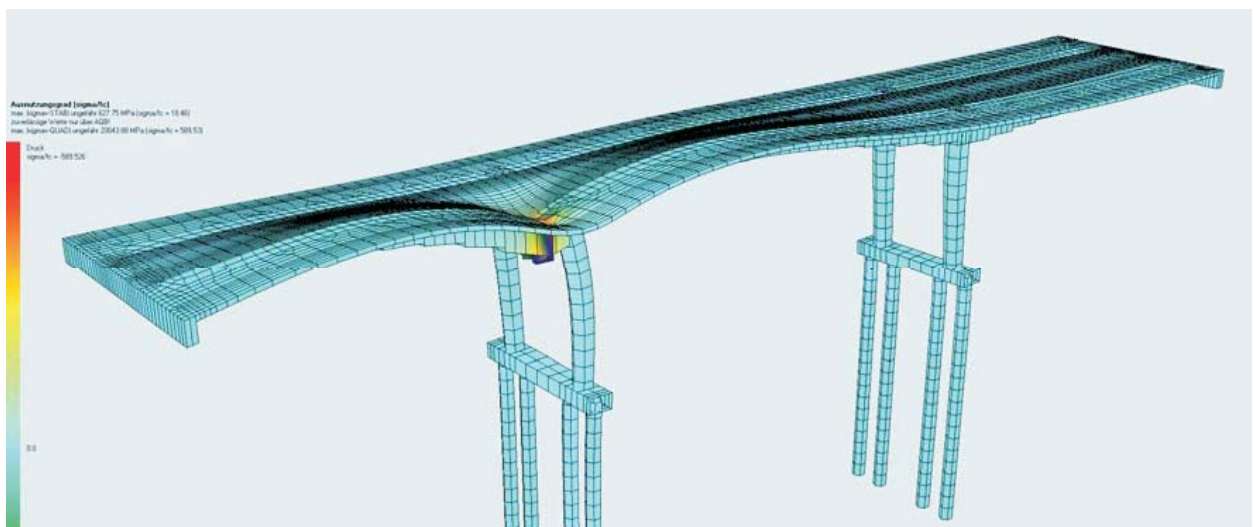


Abbildung 13: Einflussfunktionen für das Biegemoment [13]

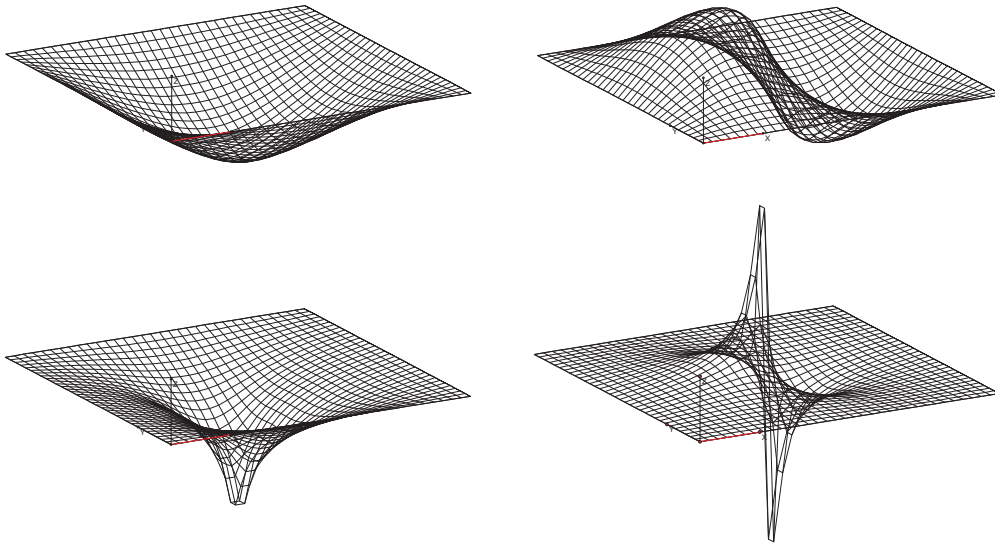


Abbildung 14: Einflussfunktionen im Vergleich: **a)** Durchbiegung, **b)** Verdrehung (Neigung), **c)** Moment  $m_{xx}$ , **d)** Querkraft  $q_x$ ; a) und c) sind Summenformeln und b) und d) sind Differenzenformeln

Und jetzt versteht man auch sofort das handicap der finiten Elemente. Aufgrund der eingeschränkten Beweglichkeit der finiten Elemente stimmen die Fortleitungszahlen nicht. Die Einflussfunktionen können sich nicht richtig ausbilden. Die Kommunikation zwischen dem Aufpunkt und der Wanderlast ist gestört.

- Die eingeschränkte Kinematik ist der Kardinalfehler der finiten Elemente.

## 1.6 Abklingverhalten

Das Erzeugen von Einflussfunktionen, gleicht dem Wurf eines Steines in ein großes Wasserbecken, das in mehrere Kanäle und Seitenarme aufgeteilt ist. Der Stein wirft Wellen, und diese Wellen verebben (in der Regel) mit wachsendem Abstand von dem Aufpunkt, s. Bild 17, wobei die Enge oder Weite der Kanäle (die Steifigkeiten der Bauteile), die Ausbildung der Uferzonen (Lager) etc. das Abklingverhalten zusätzlich beeinflussen.

Lassen wir die Einflüsse der Umgebung zunächst einmal weg, dann hängt das Abklingverhalten primär vom Typ der Einflussfunktion ab. Eine Einflussfunktion für eine Durchbiegung ebbt langsam ab, während die Einflussfunktion für eine Querkraft sehr viel schneller abebbt. Je höher die Ordnung der Ableitung des Wertes ist, den man berechnen will,

$$w \quad w' \quad M = -EI w'' \quad V = -EI w''' \quad (4)$$

desto schneller ebbt die Einflussfunktion ab.

Das gilt auch für Scheiben und Platten, wie man in Bild 14 sieht, wo die vier Einflussfunktionen für die Durchbiegung  $w$ , die Verdrehung  $w_{,x}$  ( $= w'$ ), das Moment  $m_{xx}$  und die Querkraft  $q_x$  in der Mitte einer Platte dargestellt sind.

Die weit ausholende Einflussfunktion für die Durchbiegung signalisiert dem Tragwerksplaner, dass auch entfernt stehende Lasten noch die Durchbiegung in der Plattenmitte beeinflussen. Während die ganz eng gefasste, aber steil ansteigende Einflussfunktion für die Querkraft

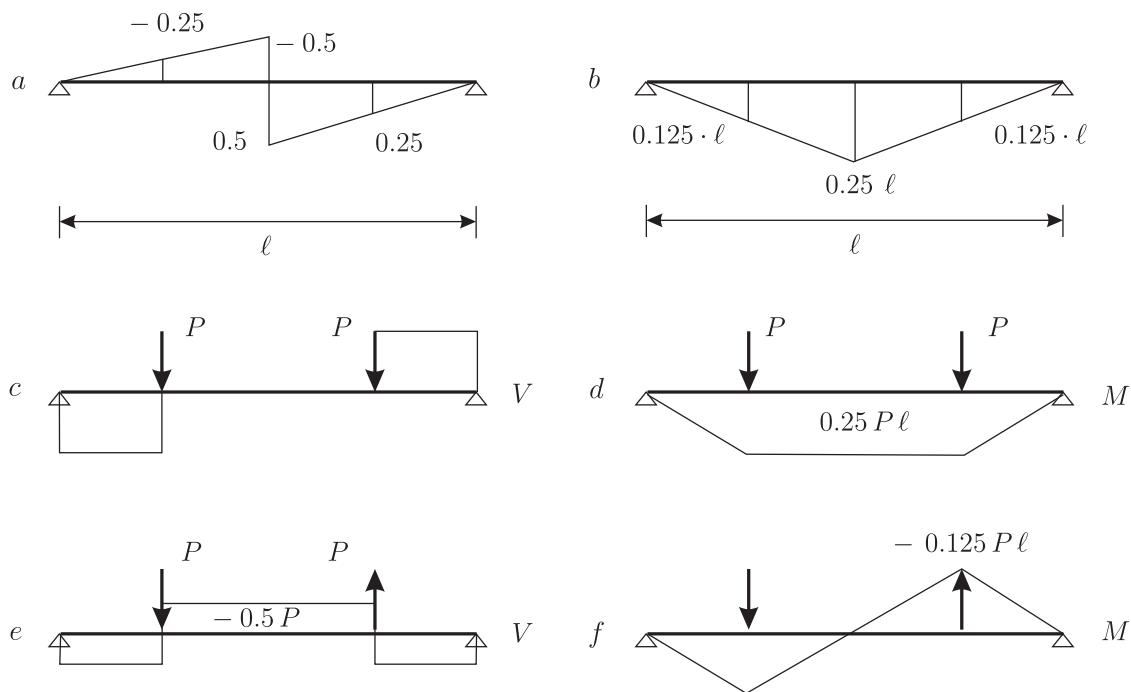


Abbildung 15: Einflussfunktion für **a)** die Querkraft und **b)** das Biegemoment in Feldmitte im Vergleich: Die Einflussfunktion für  $V$  reagiert auf Differenzen (*'high-pass filter'*) und die für  $M$  summiert (*'low-pass filter'*).

darauf hinweist, dass die Querkraft in Plattenmitte nur von den Lasten in unmittelbarer Nähe des Aufpunkts abhängt.

## 1.7 Dipole und Monopole oder warum Querkräfte ungenauer sind als Momente

Diese Unterschiede sind der Grund, warum Durchbiegungen in FE-Programmen wesentlich genauer sind als Querkräfte, denn dem FE-Programm fällt es viel leichter die einfache 'Delle', die die Einflussfunktion für  $w$  darstellt, anzunähern als die Scherbewegung, die die Einflussfunktion für die Querkraft darstellt. Die Einflussfunktion für die Durchbiegung wird von einer Einzelkraft, einem Monopol, erzeugt während die Einflussfunktion für die Querkraft von einem Dipol erzeugt wird. Die eine Einflussfunktion integriert, und die andere differenziert.

- Monopol summiert (Durchbiegung, Moment)
- Dipol differenziert (Spannung, Querkraft)

Dipol und Monopol sind Begriffe aus der Elektrotechnik. Ein Dipol entsteht, wenn zwei elektrische Punktladungen,  $+1/\Delta x$  und  $-1/\Delta x$ , sich aufeinander zu bewegen,  $\Delta x \rightarrow 0$ , und die Ladungen dabei gleichzeitig über alle Grenzen wachsen.

In der Statik entspricht ein solcher Dipol zwei entgegengesetzt gerichteten Einzelkräften  $P = \pm 1/\Delta x$ , die sich aufeinander zu bewegen und dabei immer größer werden. Dort wo sie zusammentreffen, reißt es den Balken auseinander, und es entsteht ein Versatz der Größe  $\Delta w = 1$ .

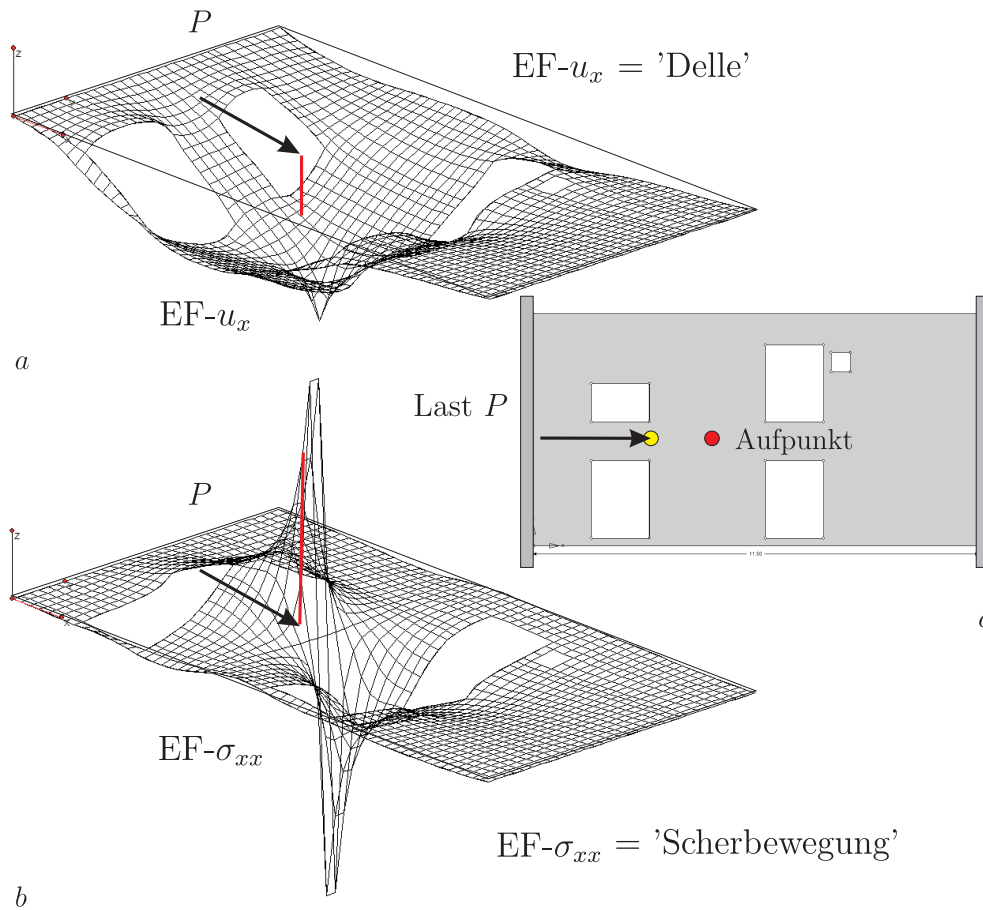


Abbildung 16: Einflussflächen in einer Scheibe **a**) für die horizontale Verschiebung  $u_x$ , **b**) für die horizontale Spannung  $\sigma_{xx}$  **c**) die Scheibe und der Aufpunkt; die Ausschläge entsprechen horizontalen Bewegungen der Scheibe nach links und rechts

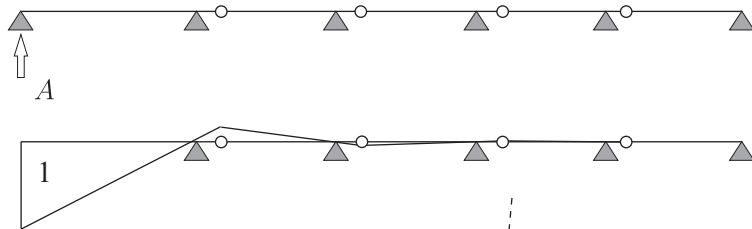
Auch die Einflussfunktionen für die Spannungen werden von Dipolen erzeugt. So entsteht die Einflussfunktion für die horizontale Spannung  $\sigma_{xx}$  in einer Scheibe dadurch, dass zwei Horizontalkräfte  $\pm 1/\Delta x$ , von links und rechts kommend, sich im Aufpunkt treffen und den Punkt dabei in zwei Teile zerreißen, und eine Punktversetzung der Größe Eins im Aufpunkt erzeugen, s. Bild 16.

Die Einflussfunktion für eine Verschiebung hingegen wird durch einen Monopol erzeugt, eine einzelne Kraft  $P = 1$ .

Einflussfunktionen, die von Monopolen erzeugt werden, summieren, während Einflussfunktionen, die von Dipolen generiert werden, differenzieren.

Ein Monopol erzeugt eine Delle: Was in diese Delle hineinfällt zählt, erhöht die Verformung. Die Dipole dagegen erzeugen Scherbewegungen oder Wellen, wie in einem Teppich, der Falten wirft. Wenn links und rechts vom Dipol dieselbe Belastung steht, dann heben sich die Wirkungen gegenseitig auf, wie die Querkraft  $V$  in der Feldmitte eines Einfeldträgers unter Gleichlast (antimetrisch  $\times$  symmetrisch = Null). Wenn die Belastung jedoch in der Mitte ihr Vorzeichen wechselt, dann wird  $V$  maximal (antimetrisch  $\times$  antimetrisch = Max).

Gerberträger Nr. 1



Gerberträger Nr. 2

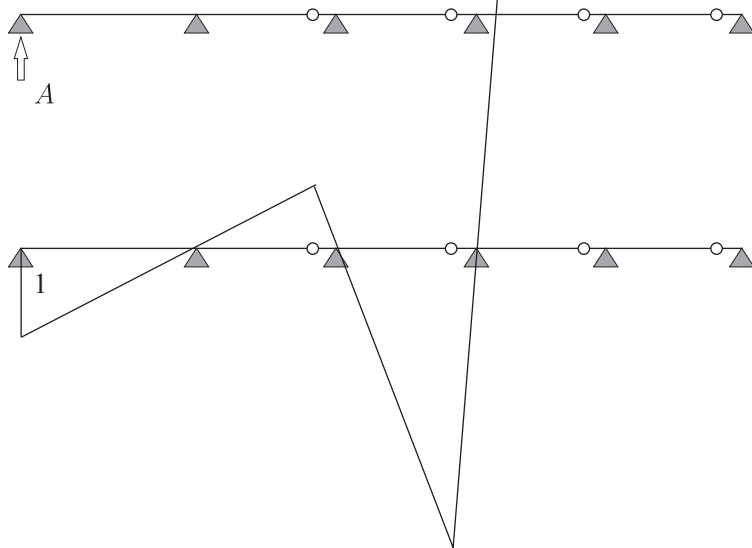


Abbildung 17: Einflussfunktionen für die Lagerkraft  $A$  an zwei Gerberträgern. Nicht alle Einflussfunktionen klingen ab!

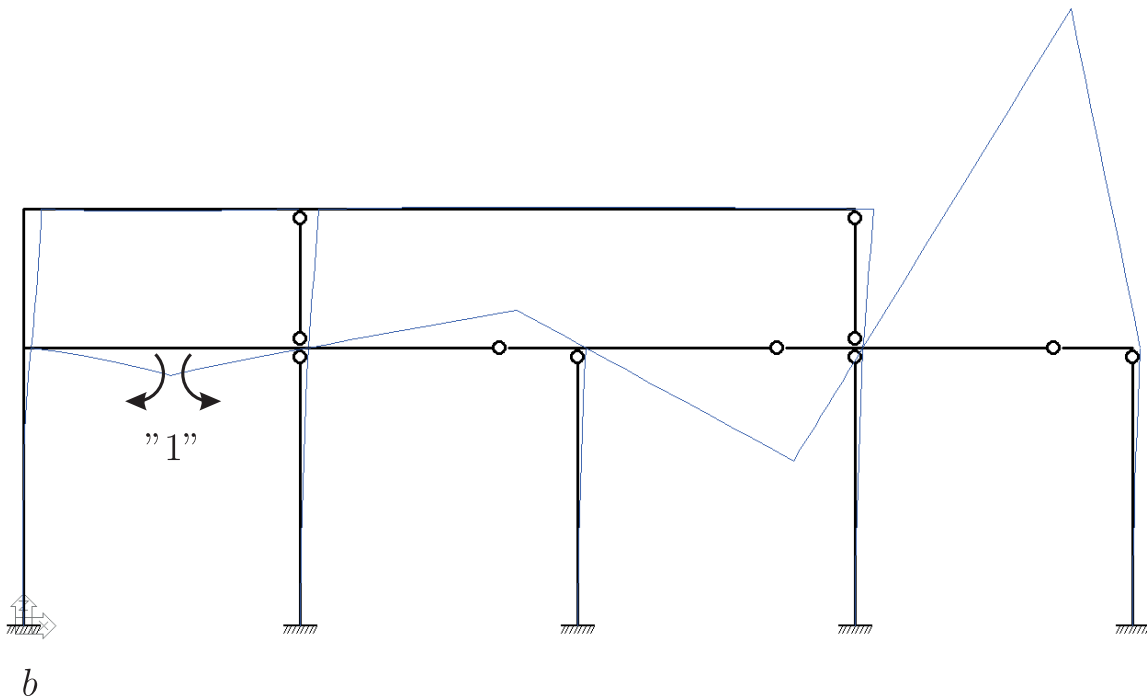
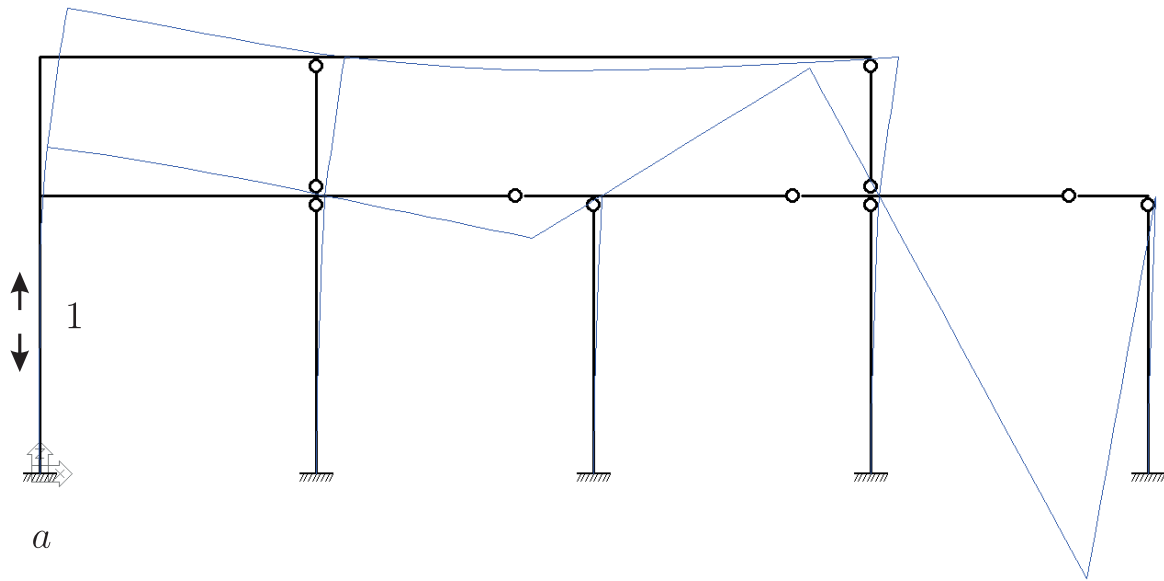


Abbildung 18: **a)** Einflussfunktion für die Normalkraft und **b)** das Biegemoment  $M$  im Riegel. Nicht alle Einflussfunktionen klingen ab!

Es ist jetzt auch klar, warum Verformungen und Momente von FE-Programmen relativ genau berechnet werden, während Spannungen und Querkräfte dagegen deutlich abfallen. Dellen kann ein FE-Programm schon auf groben Netzen relativ gut approximieren, während Scherbewegungen schwerer darzustellen sind. Oder anders: Differenzieren rauht auf, integrieren glättet.

Die Einflussfunktionen für Lagerkräfte sind übrigens alle vom Summentyp, auch wenn die Lagerkräfte Querkräfte oder Normalkräfte sind, ihre Einflussfunktionen also auf Scherbewegungen beruhen, weil sich an Lagern die Differenzbewegungen, die wir typischerweise bei einem Querkraft- oder Normalkraftgelenk sehen, nicht ausbilden kann. Die eine Hälfte des Gelenkes ist sozusagen 'geerdet', fest mit dem Boden verbunden und kann sich daher nicht bewegen. Die Bewegung der anderen Gelenkhälfte gleicht dann einer 'halben' Delle (aber mit der vollen Auslenkung Eins am Gelenk).

## 1.8 Einflussfunktionen, die mit dem Abstand vom Aufpunkt wachsen

In der Regel ist es so, dass die Einflussfunktionen mit zunehmendem Abstand vom Aufpunkt immer kleiner, immer schwächer werden. Daher ist es in der Regel zulässig, sich bei dem Studium der Einflussfunktionen auf den Nahbereich des Aufpunkts zu konzentrieren, wie im Fall des Gerberträgers in Bild 17 a.

Wenn man allerdings die Gelenke in dem Gerberträger von links nach rechts verrückt, dann schaukelt sich die kinematische Kette auf, s. Bild 17 b, und das bedeutet, je weiter die Last vom Lager entfernt ist, desto größer wird die Lagerkraft! Also Vorsicht, wenn die Einflussfunktionen Anteile von Starrkörperbewegungen (kinematische Ketten!) enthalten.

Dieser Effekt kann auch bei ganzen Rahmen auftreten, s. Bild 18. Sowohl die Einflussfunktion für die Normalkraft, Bild 18 a, wie für das Biegemoment in dem linken Stiel, Bild 18 b, werden umso größer, je weiter man sich von dem Aufpunkt entfernt. Natürlich ist dieses Beispiel konstruiert, aber die Tatsache, dass es möglich ist ein solches Beispiel zu konstruieren, sollte eine Warnung vor einem allzu naiven Umgang mit Einflussfunktionen sein.

- Ein FE-Ergebnis ist dann exakt, wenn die zugehörige Einflussfunktion auf dem Netz exakt dargestellt werden kann.
- Praktisch reicht es aus, wenn die Einflussfunktion im Bereich der Last exakt ist.
- Exakte Einflussfunktionen können in der Regel auf einem FE-Netz nicht dargestellt werden. Es muss daher das Ziel einer FE-Berechnung sein, das Netz so auszubilden, dass der Fehler in den genäherten Einflussfunktionen möglichst klein ist.

## 1.9 Singularitäten

Wie geht man mit Singularitäten um? Zunächst gilt: Singularitäten lassen sich nicht vermeiden. Singularitäten treten, wenn man der Elastizitätstheorie glaubt, praktisch bei jeder Scheibe und Platte auf. Selbst bei einer Kragsscheibe werden zum Beispiel die Randspannungen an der Einspannstelle oben und unten theoretisch unendlich groß. Wovon man aber in der Praxis normalerweise nichts sieht, weil die Netze dafür einfach zu grob sind. Andere Singularitäten machen sich aber auch schon auf groben Netzen bemerkbar. Das sind die

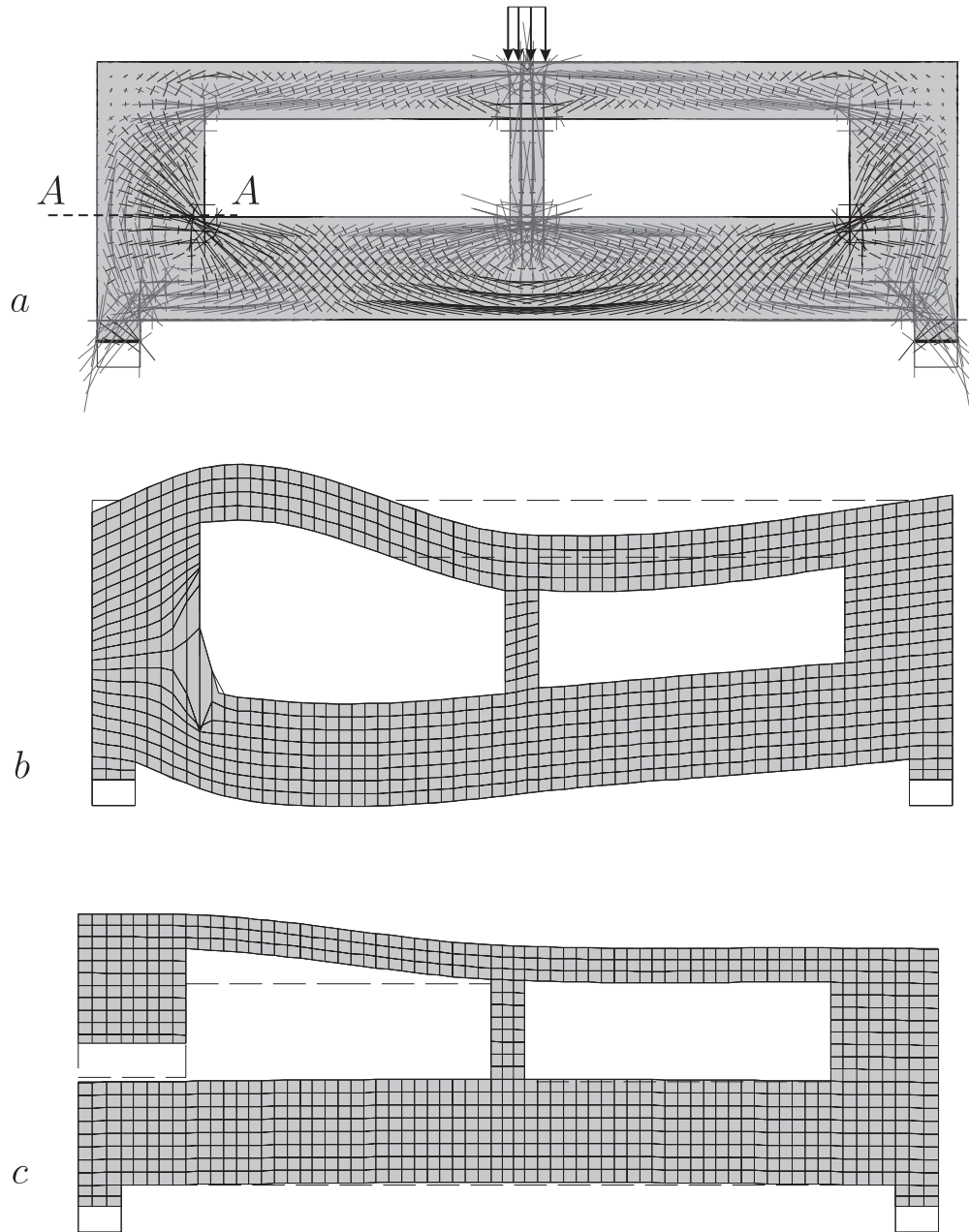


Abbildung 19: Wandscheibe: **a)** System und Belastung; **b)** Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{yy}$  in der Nähe der Ecke; **c)** Einflussfunktion für die Normalkraft  $N_y$  im Schnitt A–A, [8]

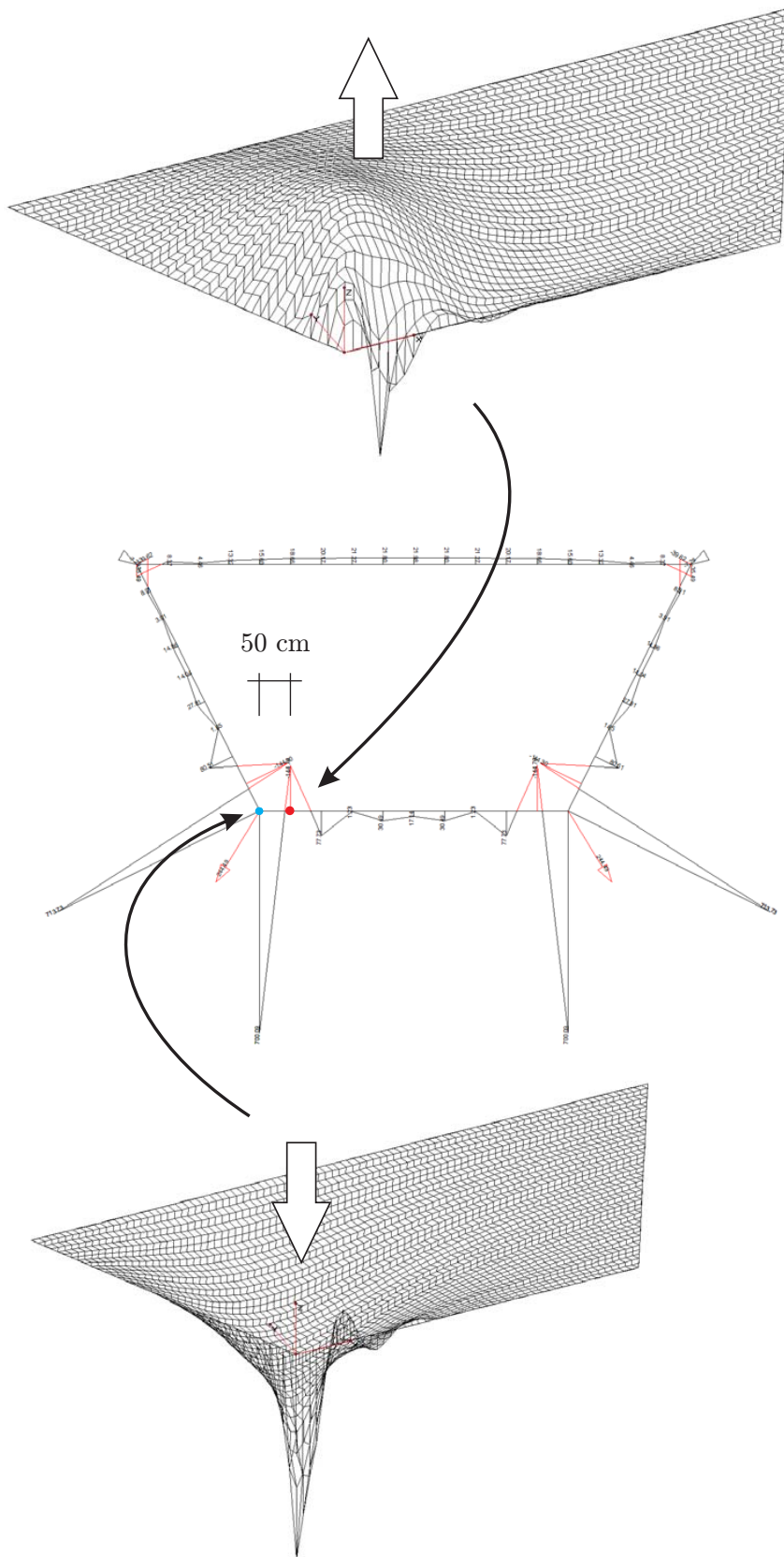


Abbildung 20: Trapezplatte unter Gleichlast. Die Lagerkräfte oszillieren in den stumpfen Winkeln, wie es die Elastizitätstheorie voraussagt. Die Flächen oben und unten sind die Einflussfunktionen für die Querkraft in der Ecke, bzw. kurz dahinter. Die Punkte liegen nur 50 cm auseinander, aber die Einflussfunktionen drehen das Vorzeichen um!

Singularitäten, die dem Ingenieur Schwierigkeiten machen.

Es hilft nicht, das Netz in der Nähe der Singularität zu verfeinern, weil dadurch nur die Spannungen noch größer werden. Das einzige was hilft, ist, dass man statt Punkten Schnitte betrachtet, also von Punktwerten zu integralen Werten wechselt. Das kann man sogar überzeugend begründen.

Der Punkt  $A$  der Scheibe in Bild 19 ist ein solch singulärer Punkt. Dort treten unter der eingezeichneten Belastung Zugspannungen auf. Diese werden umso größer, je feiner man das Netz in der Nähe der Ecke macht. Wenn man aber, statt der Spannung in der Ecke, die resultierende Normalkraft in einem horizontalen Schnitt durch den Wandpfeiler betrachtet, dann herrscht Ruhe. Die Normalkraft ist stabil, sie ändert sich kaum, wenn das Netz verfeinert wird. Für den Spannungsnachweis in der Ecke empfiehlt es sich also aus der Normalkraft in dem Schnitt eine mittlere Spannung zu berechnen und diese dann zur Ecke hin um den Faktor zwei (z.B.) zu erhöhen.

Das Studium der Einflussfunktionen löst das Rätsel auf. Die Einflussfunktion für die Spannung in der Ecke wird ja durch eine Versetzung des Eckpunktes in vertikaler Richtung erzeugt, was an sich schon schwierig zu modellieren ist. Weil nun aber die Spannung unendlich groß wird, muss diese Versetzung zu unendlich großen Verschiebungen im Fußpunkt der Last führen! Die Versetzung in *einem* Punkt reißt praktisch die ganze Scheibe auseinander! Wie soll das auf einem FE-Netz vernünftig dargestellt werden? Und wenn auch die Einflussfunktion für die Ecke selbst 'explodiert', so dürfen doch die Einflussfunktion für die Spannungen in den benachbarten Punkte die Scheibe nur fast auseinanderreißen, weil die Spannungen ja auch nur 'fast' unendlich sind. Wie soll das gehen?

Die Einflussfunktion für die Normalkraft in dem Schnitt dagegen ist viel harmloser. Sie entsteht, indem zunächst der Schnitt geführt wird und dann die beiden Schnittufer um insgesamt eine Längeneinheit nach oben und nach unten auseinander gedrückt werden. Und das ist eine Bewegung, die schon auf groben Netzen sehr gut dargestellt werden kann, und daher ist auf das FE-Ergebnis Verlass. Eine Verfeinerung des Netzes scheint da überflüssig. Sie bringt, wie beobachtet ja auch nichts. Das Ergebnis ist von Anfang an stabil.

Singuläre Punkte erkennt man also daran, dass die Spannungen in Ihrer Nähe sehr empfindlich auf Veränderungen in der Maschenweite des Netzes reagieren. Die Spannungen in solchen Punkten sind nur Momentaufnahmen, die für ein Netz 'richtig' sind, die aber sofort ins Laufen kommen, wenn man das Netz verfeinert.

Theoretisch sollte man ein Netz so lange verfeinern, bis es ausiteriert ist, d.h. bis sich die Spannungen in den maßgebenden Punkten nicht mehr ändern. Aber das ist natürlich Wunschdenken.

## 1.10 Oszillierende Lagerkräfte

Es gibt ein Phänomen, das ganz eng mit den Singularitäten verbunden ist, und das sind oszillierende Lagerkräfte, wobei das auch oszillierende Einspannmomente sein können. Immer wenn die Lagerkräfte in einer Ecke oszillieren, es 'klemmt', dann handelt es sich um eine echte Singularität, oder es liegt ein Fehler im FE-Modell vor.

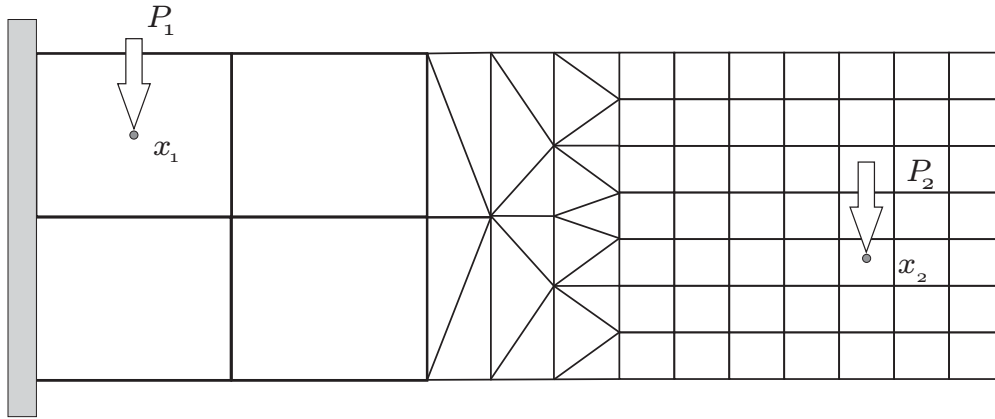


Abbildung 21: Kragarm: Ein sehr ungleiches Netz. Die kleinen Elemente rechts können den großen Fehler nicht mehr korrigieren, den sie von den vier Elementen links erben. Aber die gegenseitigen Verschiebungen,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , sind gleich groß.

Ein typisches Beispiel sind die Auflagerkräfte in den stumpfen Ecken einer Trapezplatte, siehe Bild 20. Der Rand ist eigentlich gelenkig gelagert, aber in der Ecke kommt es aufgrund der beidseitigen, schräg verlaufenden gelenkigen Lager zu einer Einspannung 'im Punkt' und darauf reagiert die Platte sehr allergisch. Nach der Elastizitätstheorie werden die Auflagerkräfte unendlich groß und damit wird das FE-Programm nicht fertig.

Eigentlich ist es die Kinematik mit der das FE-Programm nicht fertig wird, denn die oszillierenden Lagerkräfte sind nur ein Echo der oszillierenden Einflussfunktionen, siehe Bild 20. Die Einflussfunktion für die Lagerkraft in der Ecke selbst (unteres Bild) wölbt sich nach unten, die Lagerkraft ist also positiv, während die Einflussfunktion für die Lagerkraft in einem unmittelbar benachbarten Punkt (50 cm nach rechts) sich nach oben wölbt, die Lagerkraft also negativ ist! Das weist darauf hin, dass durch die Einspannung in der Ecke die Kinematik der Platte empfindlich gestört ist und das FE-Programm mit seinen beschränkten Mitteln diese Kinematik nicht nachbilden kann.

Es gibt aber ein Beispiel, wo die Oszillationen in den Lagerkräften sogar richtig sind und das sind Wandenden. Wenn der Knoten vorne an der Wand nach unten geht, also die Einflussfunktion für die Knotenkraft erzeugt wird, dann bildet sich vor der Wand eine relativ große Senke aus, in die alles hineinfällt, was nur in der Nähe des Wandkopfs steht, während wenn sich der Knoten vor dem Wandende um eine Längeneinheit absenkt, die Platte vor dem Wandkopf nach oben geht, d.h. die Knotenkraft im rückwärtigen Knoten wird negativ, wird eine Zugkraft. Auch hier ändert sich bei kurzem Abstand das Vorzeichen der Einflussfunktion—nur dass es hier anschaulich klar ist, warum.

## 1.11 Pollution

Unter pollution (engl.) versteht man den Effekt, dass die Unschärfe in singulären Punkten die Genauigkeit auch noch in weit abliegenden Punkten negativ beeinflusst. Das ist sozusagen die Gegenrede zu dem Argument, dass das Material klüger sei als das Programm und dass deswegen die singulären Punkte bei einer FE Berechnung, was ihre Fernwirkung angeht, vernachlässigt werden können.

Pollution kann man sich als *drift* der FE-Lösung vorstellen, also als Abweichung zwischen

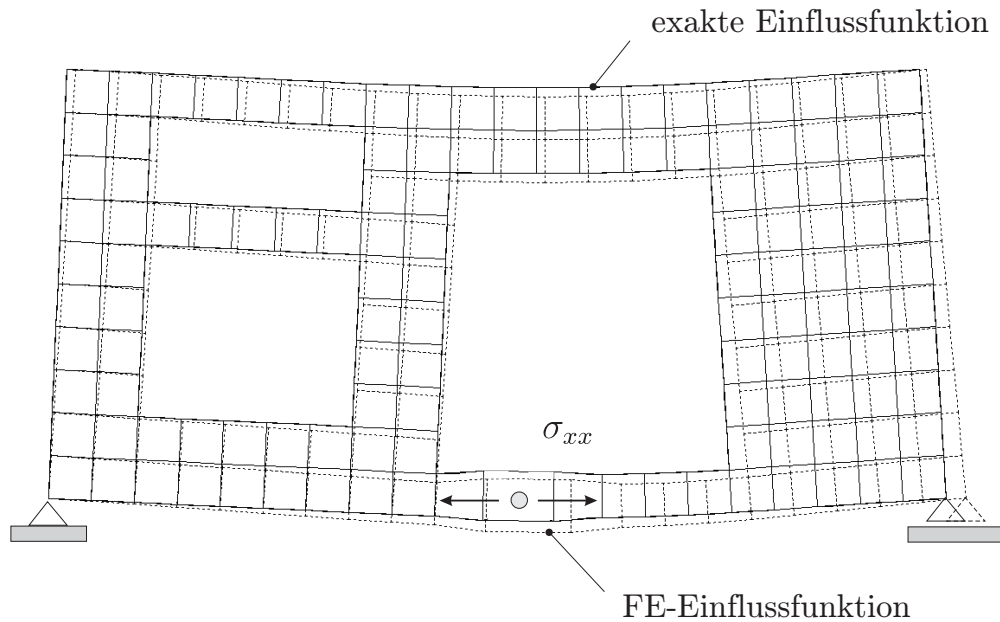


Abbildung 22: Der drift (= Abweichung in den Knoten) der FE-Einflussfunktion (hier für  $\sigma_{xx}$ ) ist mit einer der Gründe für den Fehler in den FE-Spannungen.

der FE-Lösung und der exakten Lösung in den Knoten. Wenn wir die FE-Lösung in den Knoten interpolieren könnten, dann wäre der *drift* null. Die FE-Lösung verfehlt aber die exakte Lösung in den Knoten und diese Diskrepanz ist der *drift*.

Singuläre Punkte verursachen Pollution. Sie tritt auch auf, wenn man die Elemente in ihrer Größe sehr ungleich wählt. Angenommen man modelliert eine Kragsscheibe auf den ersten zwei Metern mit nur vier großen Elementen und lässt diesen dann eine Serie von kleinen, schmalen Elementen bis zum Ende der Kragsscheibe folgen, s. Bild 21. Die kleinen Elemente haben theoretisch eine hohe Präzision, aber numerisch können sie sich nie von dem Verschiebungsfehler, dem *drift*, erholen, der durch die groben Elemente am Anfang der Kragsscheibe in das Modell hineingetragen worden ist. Auch das ist pollution.

Pollution ist deswegen gefährlich, weil man sie nicht sieht. Der Tragwerksplaner hat inzwischen gelernt, dass Oszillationen in den Ergebnissen auf Fehler in dem FE-Modell hindeuten und so hat er gar kein Arges, dass die Ergebnisse falsch sein könnten, wenn die Verläufe glatt sind. Bei der Kragsscheibe ist es aber so, dass der Verschiebungsfehler, den die kleinen Elemente von den vorderen großen Elementen erben sich nur darin äußert, dass zu allen Knotenverschiebungen konstante Werte dazu addiert werden (der *drift*). Wenn man von Knoten zu Knoten geht ist es nahezu immer derselbe Wert, d.h. die pollution verrät sich nicht durch Oszillationen. Es ist ein systematischer, glatter Fehler.

Und weil die Einflussfunktionen ja auch Verformungsfiguren sind, wirkt sich ein *drift* der Knoten auch auf sie negativ aus, das heißt das Programm unterschätzt oder überschätzt den Einfluss der Belastung auf einen Bemessungsquerschnitt, s. Bild 22.

Pollution kann nur von dem FE-Programm selbst entdeckt werden, wenn es das Netz überprüft und adaptiv verfeinert. Die Bedeutung der pollution für die praktische Arbeit halten wir für gering. Man sollte zur Kenntnis nehmen, dass dieses Phänomen existiert. Mathematiker können eindrucksvolle Beispiele für diesen Effekt produzieren, aber in der Regel ist

es im Bauwesen so, dass die übrigen Fehler, die man bei einer FE-Rechnung macht, einen größeren Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse haben.

## 1.12 Maxwell und die Folgen

Der Satz von Maxwell

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (5)$$

besagt, dass bei einem Balken die gegenseitigen Verschiebungen zweier Einzelkräfte  $P = 1$  gleich groß sind. Dieser Satz gilt auch für die finiten Elemente, und es ergeben sich daraus interessante Konsequenzen: Der Klang der Violine des Geigers auf dem Podium wird bei dem Zuhörer in der letzten Reihe nur dann gut zu hören sein, wenn umgekehrt jeder Ton, der in der letzten Reihe gespielt wird, mit derselben Qualität an das Ohr der Geigers dringt.

Angewandt auf die Kragsscheibe in Bild 21 bedeutet dies: Eine Einzelkraft  $P_1 = 1$  im Punkt  $\mathbf{x}_1$  erzeugt im Punkt  $\mathbf{x}_2$  die gleiche Verschiebung, wie umgekehrt eine Einzelkraft  $P_2 = 1$  im Punkt  $\mathbf{x}_2$  sie im Punkt  $\mathbf{x}_1$  verursacht. Auf Grund der Reziprozität,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , leiden daher beide Lastfälle unter dem groben Netz. Es nützt nichts, das Netz nur rechts zu verfeinern.

Es reicht also z.B. nicht aus das Netz nur an der Einleitungsstelle der Spannkraft zu verfeinern, sondern man muss auch die Umgebungen der Bemessungsschnitte fein genug diskretisieren, damit man ein sauberes Signal aus der Spannkraft erhält.

Wobei man jetzt noch anmerken müsste, dass ja die ganze Übertragungsstrecke zwischen Fußpunkt der Last und Bemessungsschnitt hinreichend genau modelliert werden muss, damit das Signal eine Chance hat sich korrekt auszubreiten. Und weil sich ja das Signal im Konzertsaal über den ganzen Raum ausbreitet und das Signal somit aus allen Richtungen an das Ohr des Zuhörers dringt, so muss auch das ganze Tragwerk theoretisch korrekt und fein genug modelliert werden. Theoretisch, denn anders als ein Konzertsaal ist ja ein Hochhaus kein einfacher Kubus, sondern es gleicht eher einem System von Bächen, Seen, Kanälen und Schleusen und das Signal pflanzt sich ja bevorzugt längs den Haupttragrichtungen fort. Diese muss man eigentlich finden und dann sauber modellieren.

## 1.13 Das wahre Tragwerksmodell

Für die Diskussion wird es hilfreich sein ein 'wahres' Tragwerksmodell zu definieren. Wir gehen davon aus, dass sich das wahre Tragwerk linear elastisch verhält: Eine Verdoppelung der Belastung eine Verdoppelung der Schnittgrößen und der Verformungen zur Folge hat. Der Stahlbau dürfte diesem Ideal relativ nahe kommen. Im Massivbau geht man von einem nichtlinearen  $\sigma - \varepsilon$ -Diagramm aus, aber diese Nichtlinearität kommt in der Praxis ja eigentlich nur bei der Bemessung in das Modell hinein. Vorher wird linear-elastisch gerechnet und von daher sollten die folgenden Überlegungen auch für den Massivbau gelten. Generell sind wir der Meinung, dass es vorwiegend die Kinematik ist, also die 'großen Effekte', die den Kräftefluss in einem Tragwerk bestimmt.

Unter dieser Annahme gibt es für jede Lagerkraft, für jede Spannung in einem Punkt, für jede Verformung in einem Punkt, eine Einflussfunktion. Wir sagen ein Modell dieses Tragwerkes ist dann exakt, wenn das Modell in der Lage ist, all diese Einflussfunktionen richtig

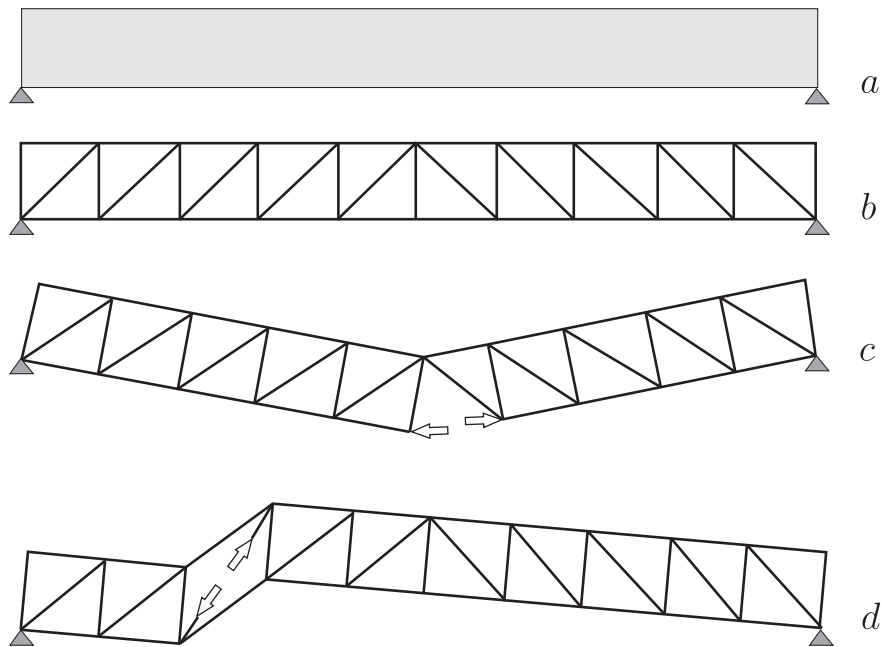


Abbildung 23: Der Erfolg der Fachwerkanalogie beruht darauf, dass die Scheibe und das Fachwerk dieselbe Kinematik aufweisen, **a)** die Scheibe; **b)** das Fachwerk; **c)** Einflussfunktion für den Zuggurt; **d)** Einflussfunktion für den Diagonalstab.

wiederzugeben.

Daran lassen sich dann FE-Modelle messen: Wie gut gelingt es ihnen, die Einflussfunktionen für die maßgebenden Schnittgrößen anzunähern? Es sind aber zwei Fehler, die hier zusammenkommen: Der Modellfehler und der numerische Fehler, nur der letztere ist dem FE-Programm anzulasten.

Ein Bürohochhaus wird ja nicht als ganzes mit Volumenelementen nachgebaut, sondern es wird in Stiele, Riegel, Deckenplatten und Wandscheiben zerlegt und die spezifischen Defekte dieser Modelle erbt das FE-Gesamtmodell des Tragwerks.

Bevor ein FE-Programm seine Fehler macht, macht also schon der Tragwerksplaner—bewusst—Fehler. Diese Modellreduktion geht mit einer Mittelung der Schnittgrößen einher. Statt Spannungen in einem Punkt betrachtet er das resultierende Moment oder die resultierende Querkraft als maßgebende Größe in einem Schnitt und er errechnet erst später wieder aus diesen Schnittgrößen die Spannungen in einzelnen Punkten des Querschnitts.

Gesetzt, dass

- Werte im eigentlichen Sinne sich immer nur auf einen Punkt beziehen, Spannungen in einem Punkt, Verschiebungen in einem Punkt
- der Raum dreidimensional ist und somit die Einflussfunktion für die Punktwerte eine dreidimensionale Erstreckung im Raum hat

so folgt, dass nur, wenn ein FE-Programm diese dreidimensionale Einflussfunktion exakt nachbilden kann, der Wert in einem Punkt exakt sein kann (von glücklichen Zufällen abgesehen).

Theoretisch wäre es denkbar, dass sich der beim Übergang von dem 3-D Modell auf das 2-D-Modell gemachte Modellfehler bei der Rückrechnung vom Schnitt auf den Punkt, also der Spannungsberechnung aus dem Moment, wieder eliminieren ließe, aber diese Kette ist nicht durchgängig intakt, sondern unterwegs werden Annahmen getroffen, die die Rückrechnung unmöglich machen. Anders gesagt: unabhängig von jedem FE-Programm sind die Spannungen, die auf einem 2-D Modell beruhen in der Regel nur Näherung.

Die inhärente Schwäche dieser Reduktionsverfahren wird bei der Analyse von räumlichen Stabtragwerken sichtbar, weil dann die Programmautoren dazu gezwungen sind, ein Ersatzmodell auf das andere zu türmen.

Für sich alleine genommen können die Biegespannungen und die Schubverformungen des ebenen Trägers auf ein entkoppeltes System von einfachen Differenzialgleichungen zurückgeführt werden. Der Querschnitt in einem räumlichen Rahmen wird aber gleichzeitig um zwei Achsen gebogen, tordiert, verwölbt und verdrillt und kein Effekt ist von dem anderen isoliert. Daher ist es schwer vorstellbar, dass die so berechneten Spannungen denselben Wert haben wie in dem echten 3-D Modell. Von daher ist man geneigt, die Ermittlung der exakten Spannungen in den Bemessungsschnitten von Stahlprofilen als die Königsdisziplin zu betrachten. Nicht weil Stabstatik so schwierig ist, sondern weil hier ein Modell auf das andere getürmt wird: Aus 3-D wird 2-D und daraus schließlich 1-D. In 1-D wird gerechnet, werden die Differentialgleichungen gelöst, und das wird dann wieder in 3-D zurück gerechnet.

Dazu kommt, dass man Anschlüsse, die aus mehreren Profilen zusammengesetzt sind, nicht in jedem Detail mit finiten Elemente nachbauen kann. Aber dies kann, wegen des Aufwandes immer nur unabhängig von dem Rest des Tragwerkes geschehen und somit ist der Effekt, den man eigentlich und modellieren will, der Übergang vom Feld in das Lager gar nicht fassbar.

Wesentlich bei jeder Modellreduktion ist, dass die charakteristische Kinematik erhalten bleibt. Darauf beruht ja der Erfolg der Fachwerkanalogie, s. Bild 23.

### 1.14 Ist 3-D genauer als 2-D?

Zunächst ist man geneigt zu sagen: Ja. Die 2-D Statik ist ja im Grunde eine Statik am Ersatzsystem, weil die einzelne Wand und der aus dem Tragwerk herausgelöste Unterzug nichts von den anschließenden Bauteilen wissen und meist starr gelagert gerechnet werden. Theoretisch sollten daher die Standsicherheitsnachweise mit dem Trend zur 3-D-Statik an Qualität gewinnen.

Praktisch ist es jedoch so, dass bei der Behandlung eines Tragwerkes als ganzem die Sorgfalt für das Detail verloren geht. Bei der 2-D Statik widmet man sich jedem Tragwerksteile einzelnen sehr detailliert und sehr aufmerksam und der Tragwerksplaner muss ein Verständnis für das Tragverhalten des ganzen Gebäudes haben, um die Lasten, die auf das einzelne Bauteil wirken, richtig anzusetzen. Bei der Statik am Gesamtmodell ist das theoretisch nicht nötig und so übersieht man leicht, dass die Entstehungsgeschichte eines Tragwerkes einen wesentlichen Einfluss auf die Statik des Tragwerkes hat, s. Bild 24.

Es ist natürlich verlockend, von einer Software zu träumen, die auf Knopfdruck automatisch die ganze Statik vom First bis zum den Fundamenten erstellt. Aber dann braucht man auch keinen Statiker mehr...

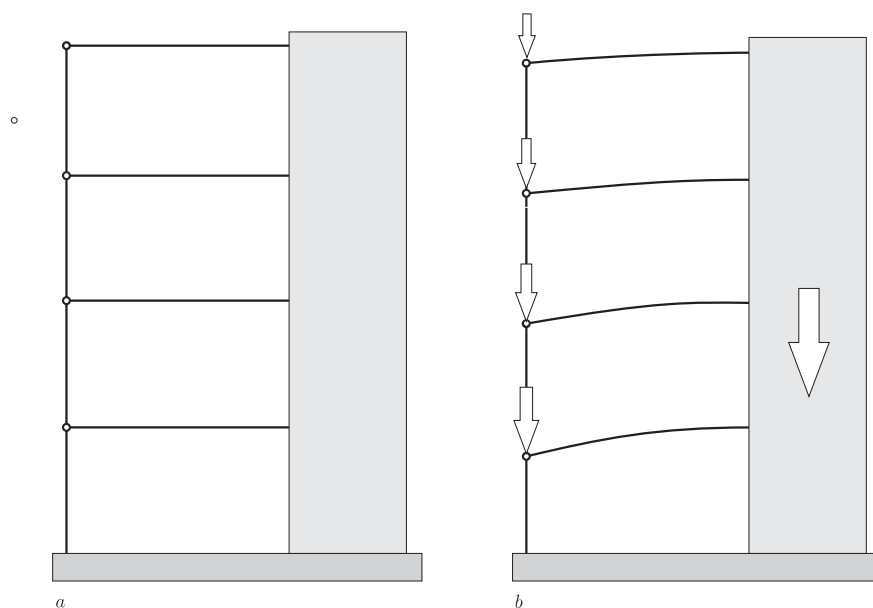


Abbildung 24: Bei einer Untersuchung am Gesamttragwerk führen die unterschiedlichen Steifigkeiten der Stützen und des Kerns zu negativen Feldmomenten in den Deckenplatten, die so nicht auftreten, weil bei der Erstellung des Gebäudes Differenzsetzungen aus Eigengewicht (teilweise) ausgeglichen werden.

Wir wollen einmal die These wagen, dass der Ingenieur dem Tragwerk seine Seele leihen muss. Das scheint uns, so merkwürdig es auch klingen mag, die primäre Aufgabe des Tragwerksplaners zu sein. Er muss eine Idee vom Tragwerk haben, er muss ein Verständnis für das Tragverhalten entwickeln und dann erst kann er darangehen die Standsicherheit eines Gebäudes nachzuweisen. Wenn er das nicht hat, wenn ihm das fehlt, dann ist die Statik eigentlich wertlos. Wie will er dann die Ergebnisse des Computers kontrollieren? Es geht ihm dann so wie dem Tragwerksplaner, der einen ganzen Gebäudeblock in den Rechner gab, und am Schluss gestand: Er wusste nicht mehr wohin die Kräfte laufen...

Wenn sich daher die Tendenz zur 3-D-Statik verstärken sollte, dann ist es unbedingt nötig, dass die Transparenz der Computerstatik im gleichen Maße zunimmt. Dann müssen Kontrollmechanismen her, dann müssen visuelle Hilfsmittel her, die es dem Tragwerksplaner ermöglichen das Tragverhalten nachzuspielen und ihn so befähigen, die Gültigkeit der Ergebnisse zu beurteilen.

Der Computer und die zunehmende Komplexität der Normen haben dazu geführt, dass die Statik mehr und mehr zu einem Blindflug wird. Die Überlagerung der Lastfälle benötigt heute ein vielfaches der Zeit die die FE-Berechnung in Anspruch nimmt. Und wer weiß am Ende der Überlagerung noch, wo die Werte herkommen? Wenn sich die 3-D Statik nicht durchsetzt, dann wahrscheinlich deswegen, weil die Ermittlung der maßgebenden Schnittkräfte in den Bemessungsschnitten bei einer Statik am Gesamtmodell unzumutbar lange dauert.

Vor dem Computer sitzt ein (junger) Ingenieur und wenn denn die Schreckensmeldungen der Prüfindenieure nicht übertrieben sind, dann ist es heute anders wie früher: Der Computer muss dem Anwender die Statik beibringen und nicht umgekehrt...

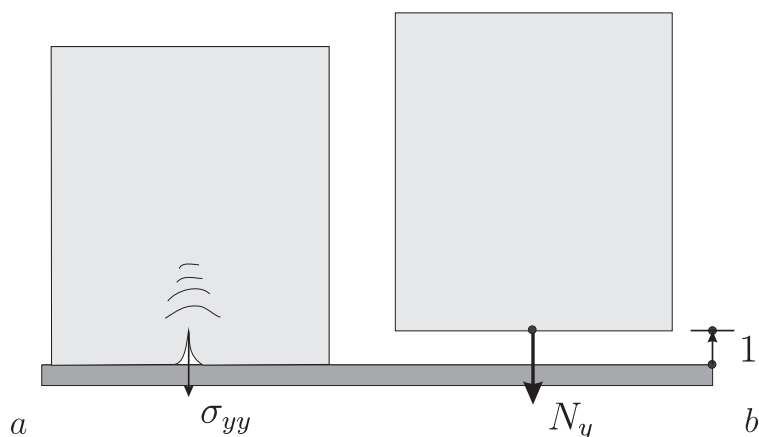


Abbildung 25: Einflussfunktion für  $\sigma_{yy}$  und für  $N_y$ , [8]

Der junge unerfahrene Ingenieur wird mit viel Sorgfalt versuchen, jedes Detail nachzubilden, jeden Anschluss, jedes Knotenblech und wird dann doch für seine Mühen eventuell schlecht belohnt, wenn dann Singularitäten zu so merkwürdigen Ergebnissen führen, die er sich gar nicht erklären kann. Er hat doch eigentlich alles richtig gemacht...

Die Ausbildung der Bauingenieure muss deren Tauglichkeit für den Einsatz im Ingenieurbüro und in der Baufirma sicherstellen. Und dazu gehört primär, dass der junge Ingenieur ein Gefühl für das Tragverhalten von Bauteilen und Bauteilgruppen erwirbt. Bei einer FE-Rechnung, die immer eine Diskretisierung notwendig macht, werden von unerfahrenen Anwendern auch ganz nebensächliche, untergeordnete Teile eines Tragwerks mitberechnet, weil die Kenntnis für die Haupttragwirkungen fehlt.

In den riesigen Zahlenmengen einer FE-Berechnung die richtigen Größen zu finden, setzt die Kenntnis des Tragverhaltens voraus. Die lässt sich aber nicht durch die Diskretisierung vermitteln, sondern durch Handrechnung von einfachen Modellen unterstützt u.U. mit Tabellen. Die genaue baustatische Berechnung bis auf kleine Fehler von wenigen Promillen kann dann mit den finiten Elementen im Nachhinein erfolgen, wenn man vorher (!) weiß, was ungefähr herauskommen muss.

## 1.15 Hierarchie der Werte

- Der einzige Wert, der bei einer FE-Berechnung garantiert exakt ist, ist die Summe  $V$ .

Einfach weil die Einflussfunktion für die Summe  $V$  eine einfache Translation des Tragwerks ist, s. Bild 25 b. Und ein solches Anheben oder Senken des ganzen Tragwerkes um eine Längeneinheit kann man schon auf dem größten Netz exakt darstellen. Es ist die einfachste mögliche Einflussfunktion. Dagegen ist die FE-Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{yy}$  in einem einzelnen Punkt der Lagerfuge, s. Bild 25 a, wahrscheinlich immer nur eine Näherung, weil man die Auswirkungen einer solchen Spreizung auf einem FE-Netz nur schwer richtig darstellen kann.

Die Genauigkeit der Ergebnisse staffelt sich also danach, wie schwierig es für das FE-Programm ist, auf dem Netz die Einflussfunktionen für diese Größen zu approximieren. Und wie natürlich gewinnen dabei die integralen Werte gegenüber den Punktwerten.

In der Hierarchie ganz oben stehen die Durchbiegungen und die Stützenkräfte, weil die Einflussfunktionen für diese Größen einfache 'Dellen' sind. Als nächstes kommen die Momente, weil auch deren Einflussfunktionen bzw. Einflussflächen von Monopolen erzeugt werden (s.o.). Auch sie summieren, auch sie integrieren. Sie addieren einfach nur alles auf, was an Belastung in der Nähe des Aufpunktes steht.

Dagegen haben die Einflussfunktionen für Spannungen und Querkräfte ein echtes handicap weil ihre Einflussfunktionen Scherbewegungen sind, deren beide *peaks* bis  $\pm\infty$  reichen. Das macht es für ein FE-Programm schwierig, die exakten Spannungen und Querkräfte zu ermitteln.

Nun könnte man einwenden, dass in der Stabstatik die FE-Ergebnisse alle exakt sind, also auf mehr als die Summe  $V$  Verlass ist. Aber man darf dabei nicht vergessen, dass die Stabstatik ja schon eine Reduktion des 3-D-Tragwerks ist und die eigentliche Frage daher ist, wie gut die 1-D-Einflussfunktion plus der nachgeschalteten technischen Biegetheorie die 3-D-Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  in einem Querschnittspunkt eines I-Profiles annähern kann?

Führen die Schritte

- Reduktion des Tragwerkes auf einen ebenen Rahmen
- Aufstellen der Einflussfunktion für das Moment  $M$  im Schnitt
- Auswertung der Einflussfunktion
- Berechnung der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  im Rahmen der technischen Biegelehre aus  $M$

auf dieselbe Spannung  $\sigma_{xx}$  wie die direkte Auswertung der 3-D-Einflussfunktion?

Streng genommen muss die FE-Einflussfunktion auch nur im Fußpunkt der Last den richtigen Wert hat. Das dazwischen ist nicht wichtig, es zählt nicht. Das erklärt, warum es selbst auf groben Netzen immer Punkte gibt, in denen die Ergebnisse richtig sind.

Bei Flächenlasten, wie etwa dem Eigengewicht, wird ja zur Auswertung der Einflussfunktion, etwa für eine Lagerkraft  $A$  ein Integral gebildet

$$A = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (6)$$

und wenn sich der Fehler in der FE-Einflussfunktion  $\eta(\mathbf{x})$  im Mittel aufhebt, dann ist die Lagerkraft exakt.

## 1.16 Zahlengläubigkeit

Der Ingenieur will Ergebnisse haben. Ihn interessiert das maximale Moment in Feldmitte, die maximale Querkraft rechts vom Auflager, etc.. All das sind Punktwerte, Werte in einem Punkt. Der Mathematiker würde sagen, das sind Punktfunktionale.

Nun kontrastiert diese Schärfe im Ergebnis mit der Tatsache, dass die Methode der Finiten Elemente ein Energieverfahren ist. Sie findet den Lastfall  $p_h$ , der dem Originallastfall am

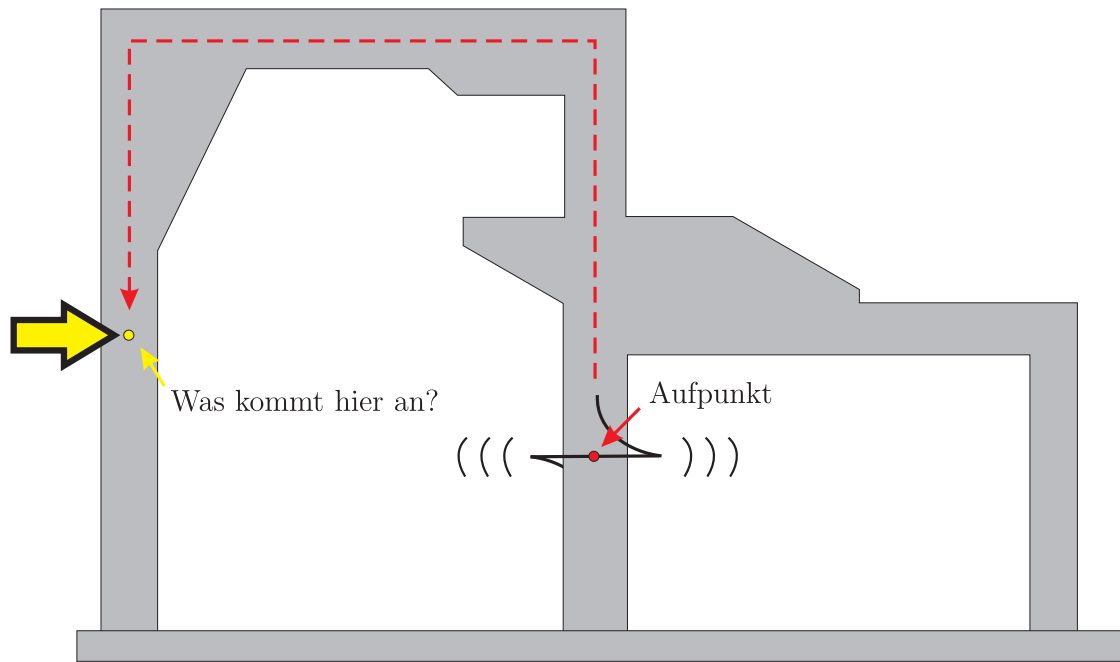


Abbildung 26: Die Einflussfunktion für die Querkraft wird durch eine Scherbewegung des Auflagerpunkts ausgelöst. Die Gestaltung der Diskontinuitätsbereiche ist entscheidend dafür, wie diese Bewegung über das Tragwerk läuft und damit entscheidend dafür, was davon im Kraftangriffspunkt ankommt, d.h. wie groß der Einfluss der Kraft auf die Querkraft ist.

nächsten kommt, dadurch, dass sie die potentielle Energie des Tragwerkes minimiert<sup>2</sup>. Der Wettbewerb wird also auf Grund *einer* Zahl entschieden. Und dann will man, wenn man diesen Ersatzlastfall gefunden hat, genau wissen, wie groß die maximalen Spannungen oder Verschiebungen in allen Punkten der Scheibe ist. Das passt scheinbar nicht zusammen.

Dies soll die Einleitung zu der Bemerkung sein, dass es im Grunde müßig ist über einzelne Zahlen, über Werte in einzelnen Punkten, bei einer FE-Berechnung zu streiten. Wenn der Algorithmus das Gesamtsystem im Auge hat, und dieses dann noch auf eine Zahl reduziert, kann man sich schon fragen, welche Genauigkeit ein einzelner Wert hat.

Dagegen kann man natürlich einwenden, dass das FE-Programm ja nicht nur einen Wurf tut, also nur einmal an den Tragwerk wackelt, sondern dass es sehr, sehr viele Tests fährt, dass es mit sehr, sehr viel virtuellen Verrückungen an dem Tragwerken wackelt und so danach strebt, dass der FE-Lastfall dem Original Lastfall möglichst nahe kommt. Hinter der einen Zahl stecken also sehr viele Würfe.

Es ist sicherlich auch müßig, über einzelne Momentenwerte oder Querkraftwerte zu streiten, aber wenn in zehn oder zwanzig Punkten die Abweichungen gegenüber einer Kontrollberechnung signifikant sind, dann ist das schon auffällig.

Auch gilt, dass man bei dem Vergleich einzelner Werte abstimmen muss. So ist zum Beispiel die Summe der Lagerkräfte immer exakt, gleichgültig wie grob das FE-Netz ist. Es ist aber

<sup>2</sup>Eigentlich wird die potentielle Energie, oder genauer ihr Betrag, maximiert. Nur weil die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage negativ ist, spricht man immer von einem Minimum. Wenn man links vom Nullpunkt ist, gewinnt der, der weiter weg vom Nullpunkt ist, also kleiner als alle anderen. Aber betragsmäßig ist es der größte Wert.

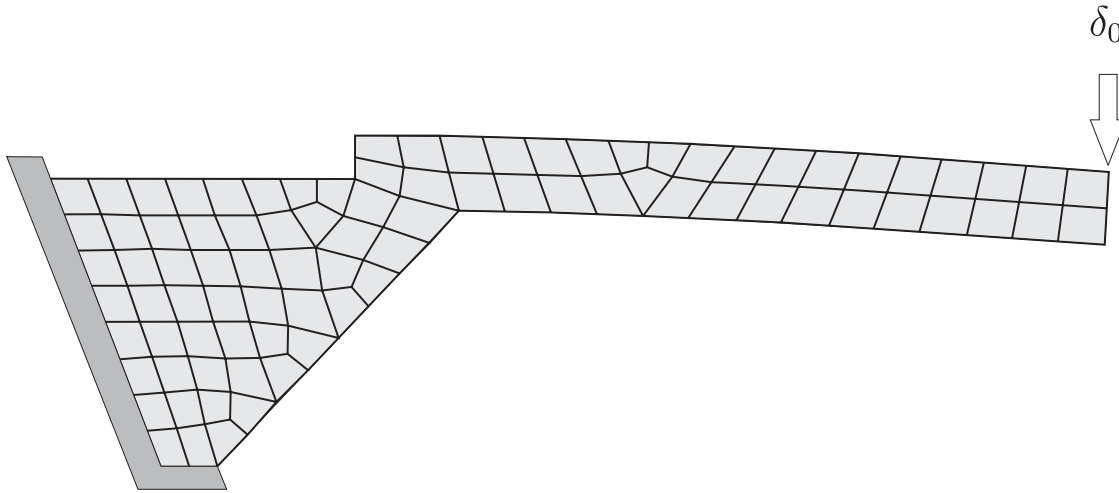


Abbildung 27: Je weiter das Tragwerk auskragt, desto fehleranfälliger werden FE-Ergebnisse.

auch der einzige Wert, der immer exakt ist. Die integralen Lagerkräfte kommen diesem Ideal relativ nahe, weil deren Einflussfunktionen sich schon auf groben Netzen gut annähern lassen. Insbesondere die Normalkräfte in Stützen sind deswegen sehr genau.

Auch die Normalkraft oder die Querkraft in einem längeren Schnitt durch eine Scheibe sollten wenig Anlass zu Zweifeln geben. Auch hier ist das Argument wieder, dass die Einflussfunktionen für solche integralen Größen leicht zu approximieren sind.

Für alle anderen Punktwerte gelten aber die Bemerkungen, die wir oben gemacht haben. Je höher die Ableitungen sind, die in einem Punkt berechnet werden sollen, Spannungen, Momente und Querkräfte sind ja Ableitungen der Verschiebungen, desto ungenauer sind die Punktwerte. Am kritischsten sind die Querkräfte und die Spannungen, weil ihre Einflussfunktionen Scherbewegungen sind, sie also differenzieren. Und man weiß, wie schwierig es ist, numerisch zu differenzieren.

## 1.17 Biege- und Diskontinuitätsbereiche

Bei der Bemessung von Tragwerken unterscheidet man heute zwischen Biegebereichen und sogenannten Diskontinuitätsbereichen. In Biegebereichen gilt näherungsweise die Balkentheorie während sich in den Diskontinuitätsbereichen ein Spannungszustand einstellt, der nur durch komplexere Modelle (2-D Scheibenstatik) erfasst werden kann.

Ursprünglich wurde diese Unterscheidung eingeführt, um den Dehnungs- und Spannungszustand in einem Querschnitt zu charakterisieren. Viele Ingenieure interpretieren dies mittlerweile so, dass sie meinen, dass in Biegebereichen die Schnittkräfte einer FE-Statik korrekt sind und nur die Ergebnisse in Diskontinuitätsbereiche mit Vorsicht zu betrachten seien. Aber dies ist eine irriige Meinung: Auch die Schnittkräfte in Biegebereichen können falsch sein.

Man überzeugt sich davon leicht, wenn man das Bild 26 betrachtet. Der Einfluss, den die Last im linken Stiel auf die Querkraft im Aufpunkt rechts hat, hängt davon ab, wie groß die horizontale Verschiebung des Lastangriffpunktes ist, wenn man den Aufpunkt spreizt (Querkraftgelenk mit Versatz von Eins). Diese Bewegung durchläuft mehrere Diskontinuitätsbe-

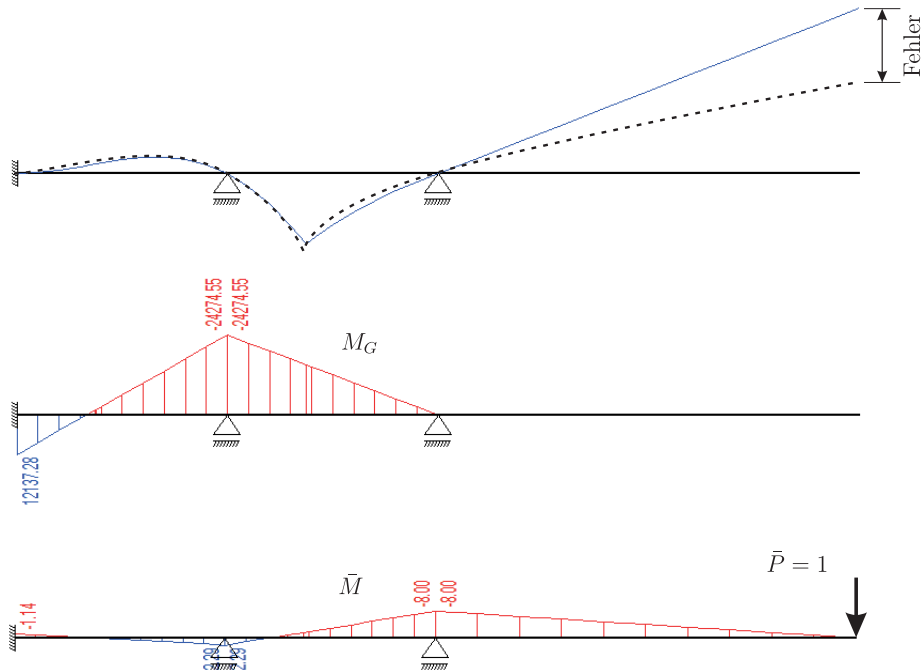


Abbildung 28: Fehleranfälligkeit bei auskragenden Bauteilen **a)** Exakte und genäherte Einflussfunktion für Feldmoment **b)** Moment  $M_G$  der exakten Einflussfunktion **c)** Moment aus der Hilfsgröße  $\bar{P} = 1$

reiche. Wenn diese Bereiche nicht richtig modelliert werden, dann kommt im Fußpunkt zu wenig oder zu viel von der Spreizung an und dann ist auch die Querkraft falsch, obwohl sie in einem Biegebereich liegt.

Das ist im Grunde das Problem, das wir oben schon angesprochen haben, nämlich dass die ganze Strecke zwischen dem Fußpunkt der Wanderlast und dem Aufpunkt korrekt modelliert werden muss. Vereinfachungen am Tragwerksmodell, das Weglassen von gewissen Teilen, starre statt drehelastische Einspannung, etc. all diese Maßnahmen müssen in diesem Licht geprüft werden: Verfälschen sie die Fortpflanzung der Einflussfunktionen oder sind die unvermeidbaren Fehler vernachlässigbar?

## 1.18 Auskragende Bauteile

Eine direkte Konsequenz dieser Überlegungen ist, dass Ergebnisse in weit auskragenden Bauteilen, wie etwa der Kragstange in Bild 27, mit Vorsicht zu betrachten sind. Dies liegt daran, dass die Einflussfunktionen für die Schnittkräfte in solchen Bauteilen—vor allem für die Anschlusskräfte—relativ fehleranfällig sind.

Angenommen, die Einflussfunktion für das Feldmoment im 2. Feld des Trägers in Bild 28 wird nicht richtig berechnet. In dem betreffenden Feld sind die Abweichungen noch klein, aber im Kragträger sind sie nicht mehr zu übersehen und je länger der Kragträger ist, desto größer werden die Abweichungen, die aus dem scheinbar kleinen Fehler entstehen.

Dies gilt nicht nur für auskragende Bauteile, sondern auch für Teile eines Tragwerkes, die

sehr weich aufgehängt sind. Denn der Einfluss der Wanderlast auf das Moment, die Querkraft oder die Normalkraft im Aufpunkt hängt davon ab, was aufgrund der Spreizung des Gelenkes im Fußpunktes Wanderlast ankommt. Und wenn die Wanderlast in einem sehr weich aufgehängten Bereich steht dann können kleine Steifigkeitsänderungen große Schwankungen dieses Wertes zur Folge haben und das bedeutet, dass sich der Einfluss der Wanderlast schlecht abschätzen lässt. Dann ist Vorsicht geboten.

## 1.19 Lagerkräfte

Die Lagerkräfte sind, zusammen mit den Durchbiegungen, die Werte, die ein FE-Programm am genauesten ermitteln kann, weil die Einflussfunktionen für die Knotenkräfte eine einfache Gestalt haben. Es sind Dellen oder Kuhlen, die dadurch entstehen, dass der Knoten um eine Längeneinheit abgesenkt wird. Genau genommen wird nicht der Knoten um eins abgesenkt, sondern

- es wird zwischen dem Knoten und seinem Widerlager ein Schnitt geführt
- es werden die beiden Schnittufer um eine Längeneinheit aneinander vorbei bewegt: der Knoten nach unten, das Widerlager nach oben.

Wenn das Widerlager fest ist (starres Lager), dann muss die Eins, die Bewegung ganz von dem Knoten aufgebracht werden, die Platte senkt sich um Eins ab. Wenn das Lager elastisch ist (Feder), dann lässt sich die Feder nach oben ziehen und um das gleich Maß muss sich die Platte weniger nach unten bewegen, die Einflussfläche für die Lagerkraft verläuft flacher. Im Extremfall, bei einer sehr weichen Feder, wird die Eins alleine von der Feder aufgebracht und die Platte rührt sich gar nicht, das heißt die Einflussfläche für die Lagerkraft ist null. Die Feder entzieht sich dem Lastabtrag.

Wenn man sich dieses Bild vor Augen hält, dann versteht man auch, warum bei einer starren Lagerung einer Decke auf einer Wand die Lagerkräfte an freien Wandenden zu Oszillationen neigen, und die Lagerkraft in dem vordersten Knoten immer den größten Wert hat, s. Bild 29. Einfach weil die Kuhle, die entsteht, wenn man den vordersten Knoten um Eins absenkt (= Einflussfunktion für die Knotenkraft), von maximaler Größe ist.

Und wenn man den dahinter liegenden Knoten um Eins nach unten drückt, dann geht der Teil der Platte vor dem Wandende nach *oben* (= negative Durchbiegungen) und das heißt, dass die Knotenkraft die Platte nach unten ziehen muss: Die Knotenkraft ist negativ. So kommen die Oszillationen in den Knotenkräfte zustande und während sie sonst auf Singularitäten oder andere Unstimmigkeiten hinweisen, ist ihr Auftreten hier durch die Statik erklärbar und ganz natürlich.

Wenn man die starre Lagerung durch Mauerwerkswände ersetzt, wie in Bild 29, dann verschwinden die Oszillationen, weil dann die Absenkung eines Knotens immer auch zu Absenkungen der Nachbarknoten führen und so die krassen Vorzeichenwechsel in den Stützkräften verschwinden.

Der Vollständigkeit halber soll sei noch erwähnt, dass bei einer FE-Analyse die geometrischen Lagerbedingungen exakt erfüllt werden, aber die statischen Lagerbedingungen nur näherungsweise. Der gelenkig gelagerte Rand einer Platte ist also nicht exakt momentenfrei, sondern nur im energetischen Mittel, im Sinne des Prinzips der virtuellen Arbeiten.

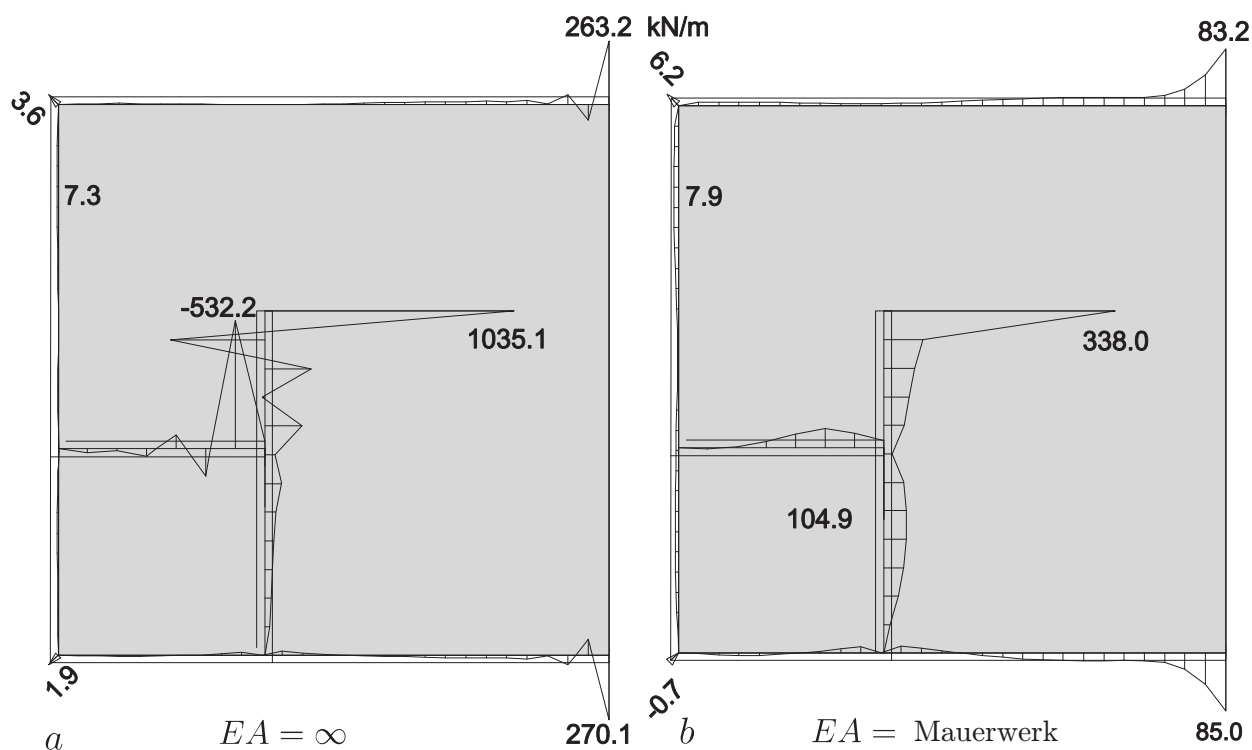


Abbildung 29: Lagerkräfte einer Platte ( $8\text{m} \times 8\text{m}$ ) im LF  $g = 9\text{ kN/m}^2$ ; der rechte Rand ist frei. **a)** Starre Lager, **b)** Lagerung auf Mauerwerk

## 1.20 Lagersteifigkeiten

Alle tragenden Teile sollten mit ihrer wahren Steifigkeit modelliert werden. Das gilt insbesondere für Wände, Stützen und Unterzüge. Zum einen erhält man nur auf diese Weise realistische Bemessungsgrößen auf der anderen Seite hilft nichts besser Singularitäten in Lagerkräften oder Spannungen abzubauen, als der Entschluss Lager mit ihrer natürlichen Nachgiebigkeit zu erfassen.

Steife Lager ziehen die Kräfte an, weil die Einflussfunktionen mit wachsender Steifigkeit 'fülliger' werden, wie man in Bild 30 sieht.

Wenn man die Lagerkräfte überschlägig mit einer Lastflächenmethode kontrolliert, dann

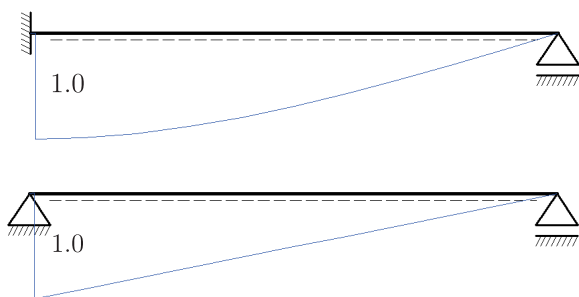


Abbildung 30: Einflussfunktionen für die linke Lagerkraft im Vergleich: **a)** Volleinspannung **b)** gelenkige Lagerung

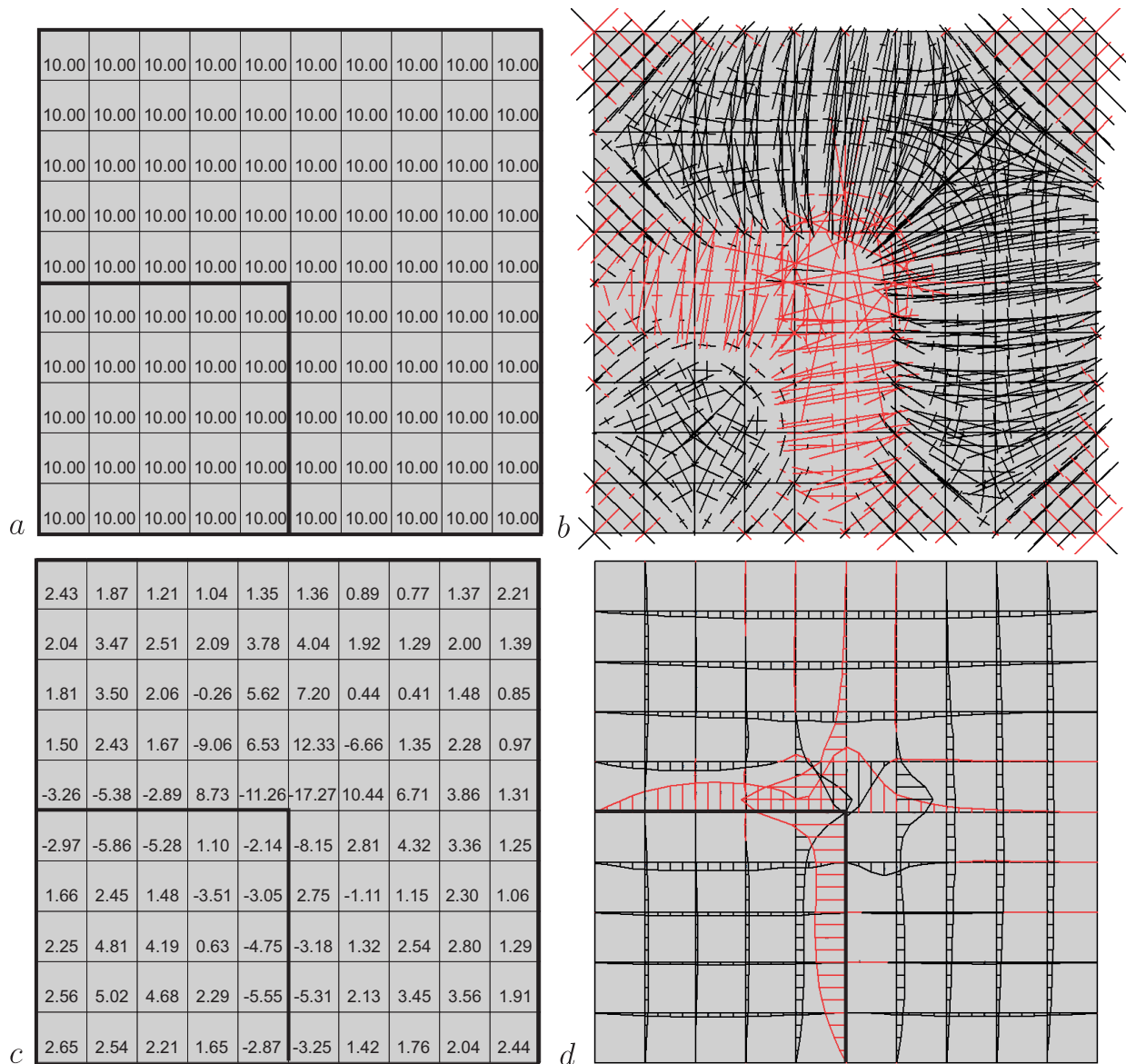


Abbildung 31: Wohnhausdecke a) System und Belastung b) Elementlasten c) Kräfte auf den Elementkanten, im Bereich der Wände sind diese Kräfte die Lagerkräfte

rechnet man im Prinzip mit starren Lagern, was ja nicht der Wirklichkeit entspricht. Zudem haftet der Einteilung einer Decke in Lastflächen eine gewisse Willkür an.

Gerade Lagerkräfte berechnen FE-Programme relativ genau. Das folgt aus der Theorie, weil die Einflussfunktionen für Lagerkräfte eine einfache Gestalt haben und schon auf relativ groben Netzen gut angenähert werden, so dass in der Regel wenig Anlass besteht die FE-Lagerkräfte anzuzweifeln. Sie dürften, krasse Bedienungsfehler ausgeschlossen, immer genauer sein, als Ergebnisse, die mit Lastflächenmethoden oder ähnlichem erzielt wurden.

## 1.21 Ausrunden der Momente?

Bei Balken ist es sicherlich sinnvoll, das Stützenmoment über den Wänden auszurunden. Ob das aber bei einer Plattenberechnung mit finiten Elementen noch gelten kann, ist doch zweifelhaft, denn in einem FE-Modell liegt eine Platte nicht auf einem scharfen Linienlager auf,

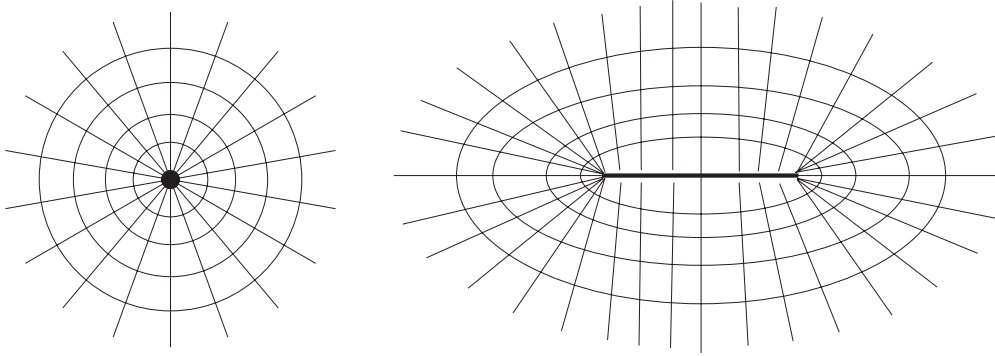


Abbildung 32: In der Nähe eines Punktlagers sind die Kraftlinien so eng gepackt, dass das Material anfängt zu fließen. Deswegen kann man eine Scheibe nicht auf ein Punktlager stellen. Und deswegen bringen auch Einzelkräfte (Knotenkräfte) die Scheibe zum fließen. Wenn ein FE-Programm wirklich mit Knotenkräften rechnen würde, dann wären alle Knoten vom Bildschirm verschwunden. Wenn die Belastung jedoch über eine kurze Länge verteilt wird, dann entschärft sich die Situation, die Kraftlinien sind nicht mehr so eng gepackt und das Material widersteht (theoretisch) den hohen Spannungen.

sondern sie ist eher weich gebettet, weil es eigentlich eine ganze 'Wolke' von Stützkräften ist, vor allem eben Flächenkräfte, die die Platte trägt. Formal sieht das so aus, sind die Knotenkräfte, die der Anwender auf den Bildschirm sieht, auch der Wolke äquivalent, aber ob man deswegen ausrunden darf oder ausrunden sollte?

In Bild 31 wird dies beispielhaft an einer Wohnhausdecke über zwei Innenwänden, die mit einer Gleichlast belastet ist, gezeigt. Dargestellt ist der Lastfall, den das FE-Programm wirklich gerechnet hat. Längs den Elementkanten drücken in ihrer Höhe veränderliche Linienkräfte die Platte nach unten. Im Bereich der beiden Innenwände drehen diese Linienkräfte jedoch ihr Vorzeichen um (!) und stützen die Platte. In dem Plot wird kein Unterschied gemacht zwischen Lasten und Lagerkräften. Es ist alles eingetragen worden, was auf die Platte drückt bzw. die Platte stützt. Die Platte liegt also auch noch, so muss man die Verteilung der Kräfte interpretieren, links und rechts und unterhalb und oberhalb von den zwei Innenwänden auf imaginären Luftkissen auf. Eine echte Schneidenlagerung stellt man sich nun doch anders vor.

## 1.22 Lagerkräfte von Scheiben

Mathematisch ist ein Punkt ein Kreis  $K_r$  mit Radius  $r$  gleich Null und damit auch mit dem Umfang Null. Zieht man immer kleinere Kreise  $K_r$ ,  $r \rightarrow 0$ , um eine Punktlast  $P = 1$ , dann müssen also die Spannungen  $\sigma$  gegen Unendlich gehen, weil nur so bei schrumpfenden Umfang  $U = 2\pi r$  das Integral der Spannungen der Kraft das Gleichgewicht halten kann

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{K_r} \sigma ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sigma r d\varphi = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi r} r d\varphi = 1. \quad (7)$$

Die Spannungen  $\sigma$  müssen sich also verhalten wie  $1/r$ . Dies bedeutet aber, dass das Material der Scheibe plastifiziert und zu fließen anfängt, s. Bild 32. Man kann mathematisch zeigen, dass eine Einzelkraft den Angriffspunkt bis in den Punkt  $\infty$  verschiebt. Alle Punktlager einer Scheibe müssten also vom Bildschirm verschwunden sein, wenn ein FE-Programm wirklich Knoten als Punktlager rechnen würde.

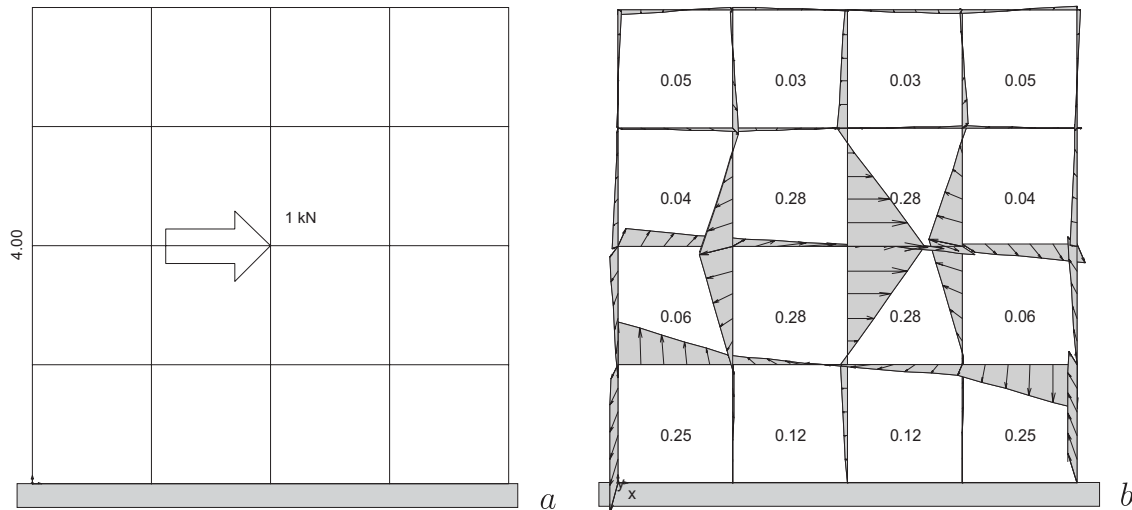


Abbildung 33: Wie es wirklich aussieht, wenn man eine Scheibe mit einer Einzelkraft belastet. **a)** Die Knotenkraft **b)** wird vom FE-Programm durch eine Schar von Linienkräften längst den Elementkanten und Flächenkräften in den Elementen angenähert. Ein FE-Scheibenprogramm kann keine Einzelkräfte rechnen.

- Man kann eine Scheibe nicht in einem Punkt festhalten.

Das sagt die Elastizitätstheorie. Man kann auch einer Scheibe keine Verschiebung in einem Punkt vorschreiben. Das tut man ja theoretisch, wenn man einen Knoten festhält.

Punktlager wie auch Knotenkräfte sind also eine Fiktion. Der Ingenieur setzt zwar eine gewisse Kraft in einen Knoten, aber das Lastbild, das von einem Scheibenprogramm erzeugt wird, ist ein ganz anderes, s. Bild 33.

Dasselbe gilt hinsichtlich der Punktlager. In einem festgehaltenen Punkt wird keine Einzelkraft eingeleitet, sondern es ist eine ganze Wolke von Flächenkräften und Linienkräften, die die Scheibe in der Nähe des Punktes stützen. Dies sieht man, wenn man sich einmal den FE-Lastfall  $p_h$  bei einer solchen Lagerung auf dem Bildschirm darstellen lässt.

- Man darf mit Punktlagern rechnen.

Natürlich darf man mit festgehaltenen Knoten, mit Punktlagern, rechnen, nur muss man sich dann über den Näherungscharakter im klaren sein.

Weil man nach der Elastizitätstheorie einer Scheibe eine Verschiebung längs einer Linie, wie einer Lagerkante, vorschreiben kann, ist es im übrigen völlig legitim, wenn man mehrere Knoten in einer Reihe festhält.

Es ist bekannt, dass Scheiben sehr empfindlich auf die Steifigkeiten der Lager reagieren, daher ist es wichtig die Steifigkeiten korrekt zu erfassen. Dies sieht man sehr schön an der Scheibe in Bild (34). Bei steifen Lagern bilden sich kleine Druckbögen zwischen den Lagern aus und die Verteilung der Lagerkräfte ähnelt einem Durchlaufträger, s. Bild 34 a, während weiche Lager zu einer Erhöhung der äußeren Lagerkräfte gegenüber den inneren Lagerkräften führen.

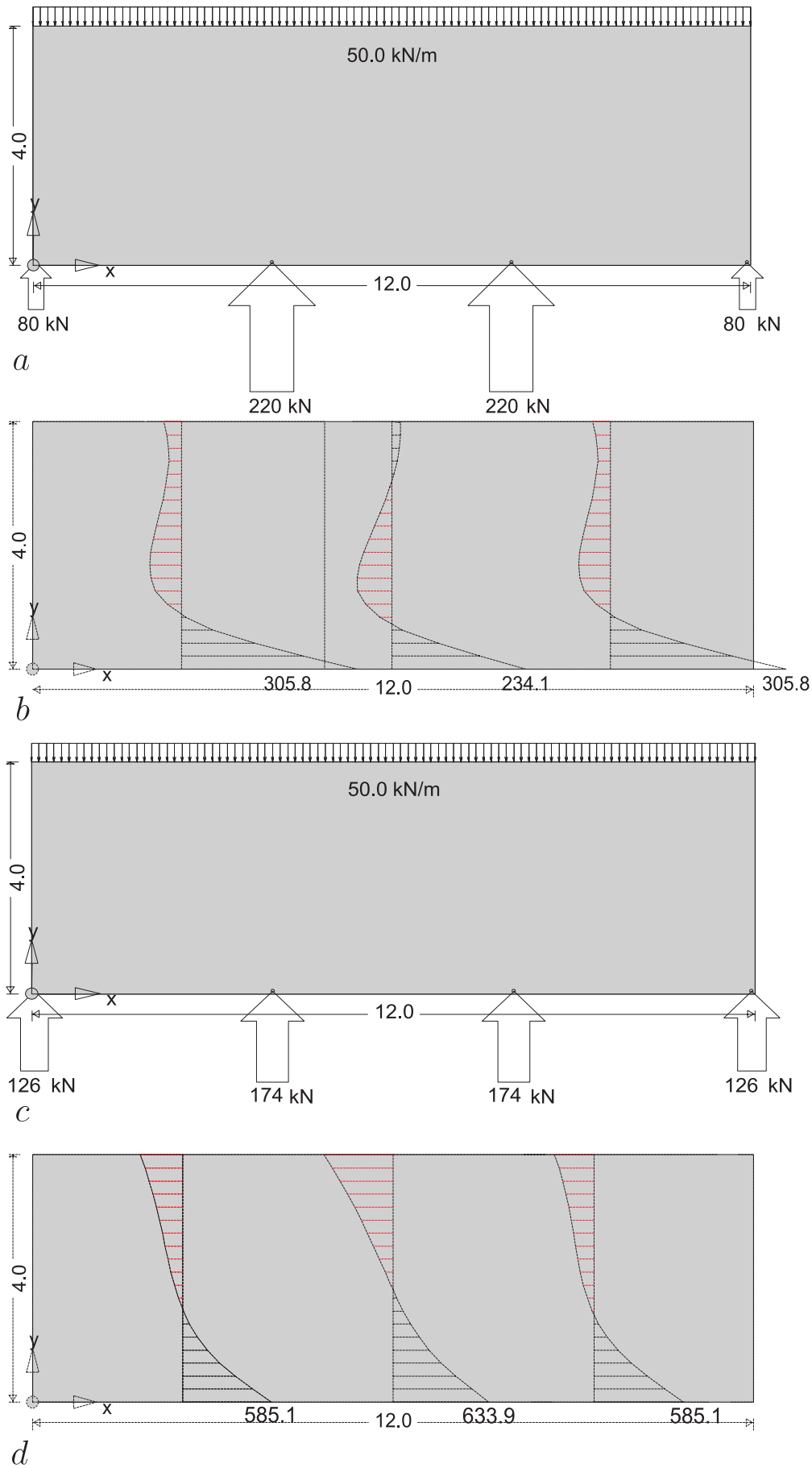


Abbildung 34: Einfluss der Lagersteifigkeit: **a)** starres Lager, **b)** Spannungen  $\sigma_{xx}$ , **c)** Mauerwerk als Lager, **d)** Spannungen  $\sigma_{xx}$  kN/m<sup>2</sup>

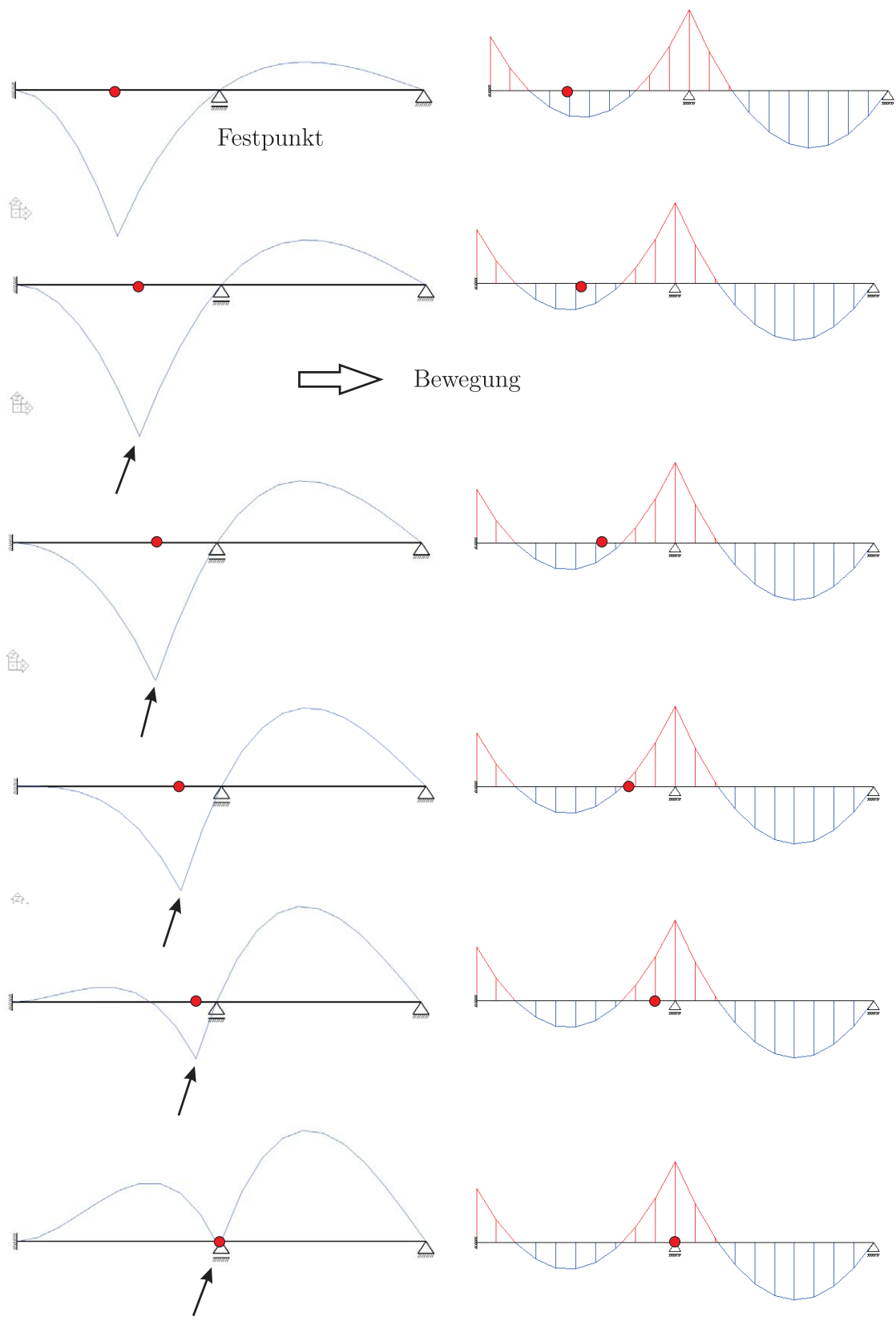


Abbildung 35: Wie sich das positive Feldmoment zu einem negativen Stützmoment entwickelt, versteht man, wenn man verfolgt, wie sich die—eigentlich immer gleich bleibende—Einflussfunktion zur Stütze hin auftrümt.

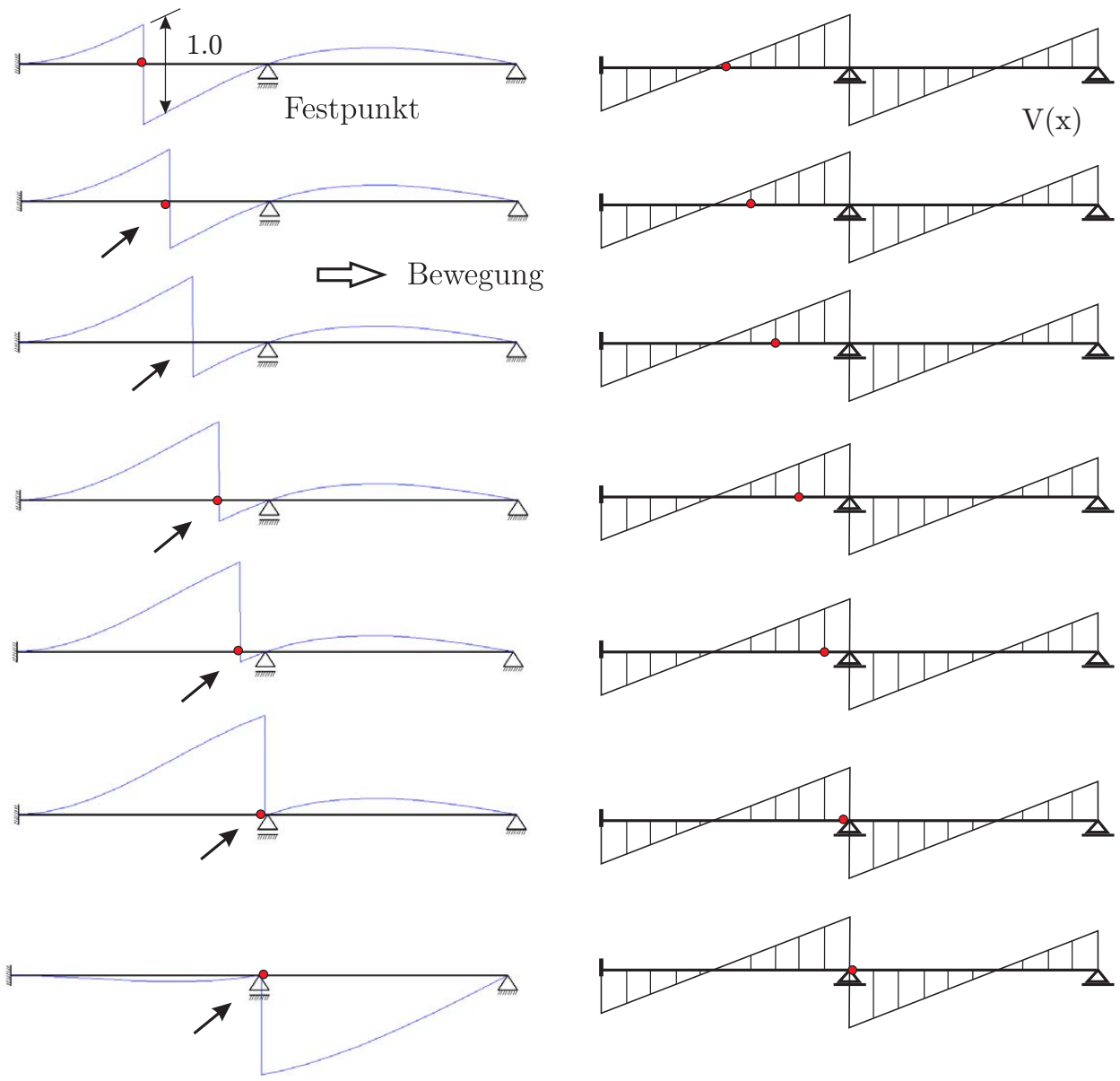


Abbildung 36: Wie die Einflussfunktion für  $V(x)$  über den Träger wandert

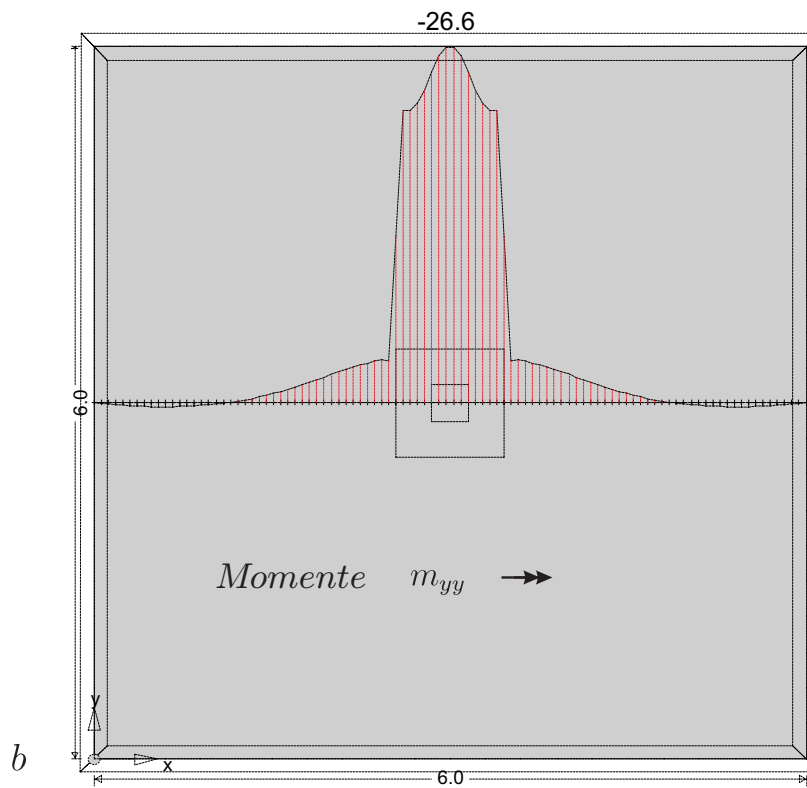
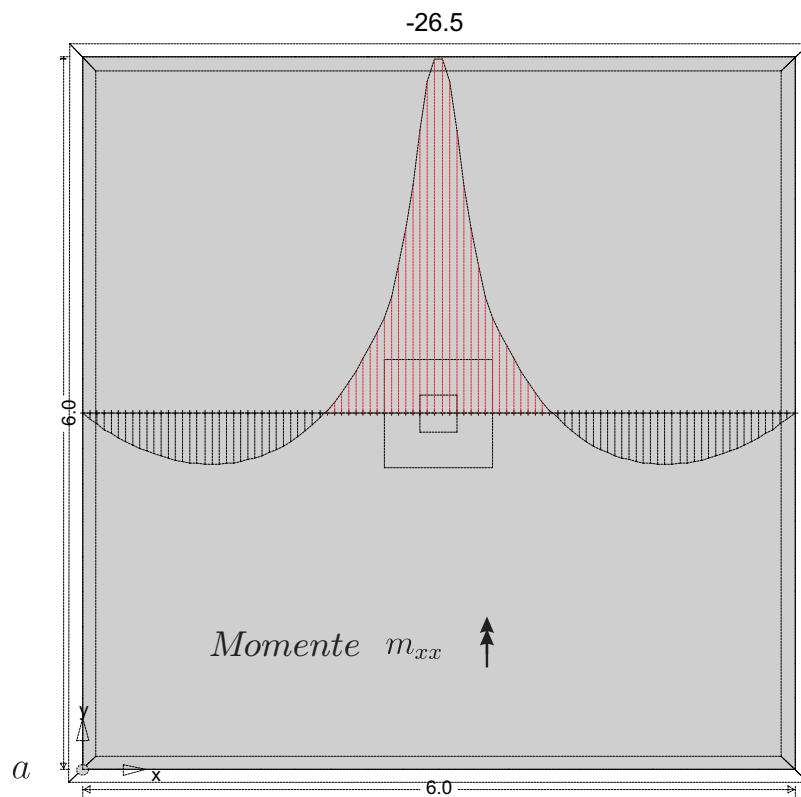


Abbildung 37: Stützenkopfverstärkung: a) Biegemomente  $m_{xx}$  längs der Mittelachse, b) Biegemomente  $m_{yy}$ . In einem vertikalen Schnitt wäre  $m_{yy}$  stetig und  $m_{xx}$  würde springen

## 1.23 Stützen

Würde man eine Rundstütze als Punktstütze (Radius  $r = 0$ ) modellieren, dann würden die Stützmomente unendlich groß werden. Weil sich die Stützenkraft jedoch über eine gewisse Fläche  $A$  ausbreitet, kommt es nicht zu diesen extremen Spitzen, sondern das Biegemoment ist vielmehr ausgerundet.

Es bleibt jedoch ein starker Anstieg des Moments zur Stütze hin. Warum dieser Anstieg so stark ist, versteht man, wenn man das Bild 35 betrachtet; es ist sozusagen die gekrümmte Einflussfunktion, die sich über die Stütze hochschiebt und so stark auftürmt.

Dieser starke Anstieg ist der Grund, warum die Stützenanschnittsmomente sich so schlecht berechnen lassen. In der Literatur sind viele Vorschläge gemacht worden, wie man durch Eingriffe in die Modellierung der Stütze zu 'besseren', d.h. genaueren Ergebnissen kommen kann.

Wir halten es jedoch für ausreichend, dass

1. Die Steifigkeiten aller tragenden Teile einer Platte korrekt modelliert werden
2. Das FE-Netz zur Stütze hin verfeinert wird.

Die letztere Maßnahme zielt auf eine bessere Darstellung der Anschnittsmomente, nicht der Lagerkraft in der Stütze. Die Lagerkraft ist auch ohne diese Maßnahme schon relativ genau.

Eine gute Orientierung bietet die Streifenmethode, die z.B. in dem Heft 240 des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton abgedruckt ist. Bei Vergleichsrechnungen zeigte sich immer eine gute Übereinstimmung.

Man beachte, dass bei Stützenkopfverstärkungen jeweils eines der beiden Momente  $m_{xx}$  und  $m_{yy}$  springt, s. Bild 37.

## 1.24 Unterzüge

Solange es keine FE-Programme gab, hat man meist Unterzüge als starre Lager gerechnet. Jetzt da man mit FE-Programmen die Steifigkeiten realistisch erfassen kann, ist man erstaunt, wie wenig die Unterzüge im Vergleich zur Platte tragen. Obwohl es eigentlich klar ist, dass eine Deckenplatte wesentlich steifer ist, als ein Unterzug, der 20 cm oder 30 cm aus der Decke ragt, s. Bild 38.

Insbesondere gilt diese für die versteckten Unterzüge. Diese bringen für das Tragverhalten einer Decke fast nichts.

Weil Unterzüge im Vergleich mit einer Platte relativ weich sind, ist es auch nicht so entscheidend, wie man nun den Unterzug modelliert:

- Platte und Balken als Faltwerk (auch Schalenmodell genannt)
- Platte als Faltwerk, Unterzug als exzentrischer Balken oder Platte
- Platte als Platte und Unterzug als exzentrischen Balken (mit Normalkraft)
- Platte als Platte und Unterzug mit Schwereachse in der Plattenmittelebene

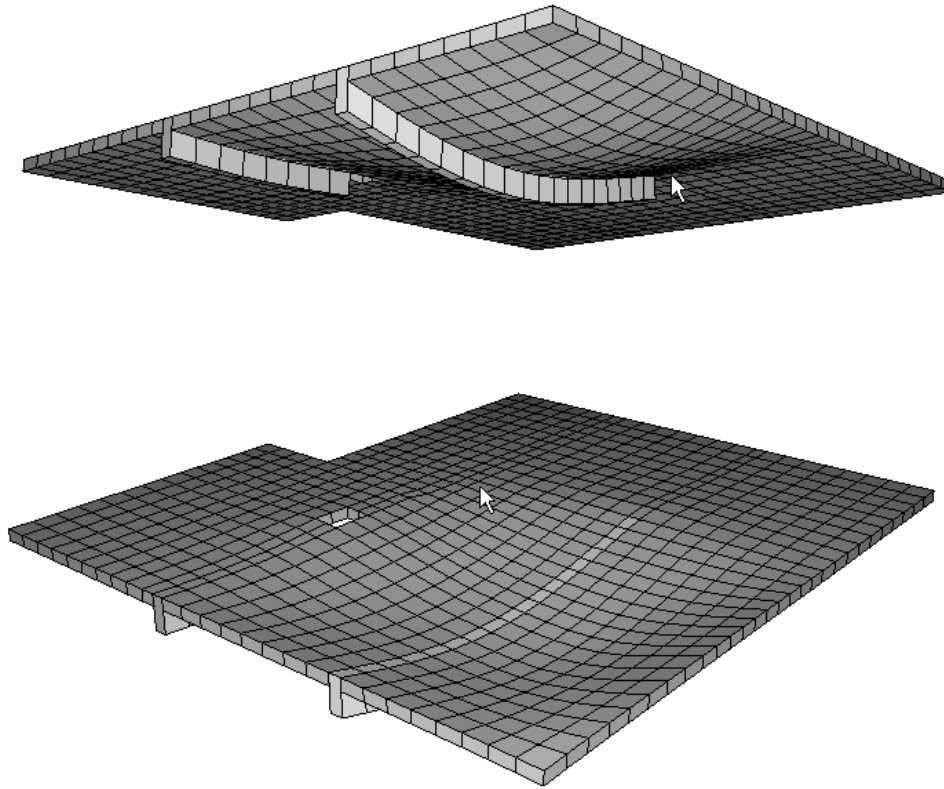


Abbildung 38: Verformungen des Systems Platte und Unterzug - stark überhöht

Die Ankopplung im Sinne der finiten Elemente bedeutet, dass die Bewegungen des Balkens und die Bewegungen der Platte in den Knoten synchronisiert werden. Es ist also eine *punktweise geometrische* (= gleiche Verformungen in den Knoten) und *energetische* Kopplung (= gleiche Arbeiten der Schnittkräfte in der Schnittfuge von Balken und Platte).

Je nachdem, ob man diese Ausmitte  $e$  berücksichtigt oder nicht, spricht man von einem *zentrisch* oder einem *exzentrisch* angeschlossenen Balken. Die Modelle unterscheiden sich dann bezüglich der Art und Weise wie die Normalkräfte aus dieser Exzentrizität in die Rechnung eingeführt werden.

Durch die Kopplung der Elemente entstehen eine ganze Reihe von Inkompatibilitäten bzw. Fehlern. Wir erinnern daran, dass das Schnittprinzip bei der FE-Kopplung *unterschiedlicher* Bauteile nicht mehr gilt, s. [8]. Nur die *virtuellen Arbeiten* der Schnittkräfte sind noch gleich. Dazu kommt noch, dass Balken und Platte sich unterschiedlich durchbiegen, denn die Biegelinie  $w$  des Balkens wird in der Regel nicht mit der Biegefläche  $w(x, y)$  der Platte in der Balkenachse übereinstimmen. Oft hat man eine Reissner-Mindlin-Platte mit Schubverformungen, die an einen Balken ohne diese angekoppelt werden. Jeder Gedanke an eine reale Einleitung der Balkenkräfte in das Plattensystem führt in die Irre, hier kann man nur in energetisch gleichwertigen Knotenkräften denken.

Wir haben in [8] die verschiedenen Varianten ausführlich diskutiert und wollen es daher an dieser Stelle bei diesem Hinweis belassen.

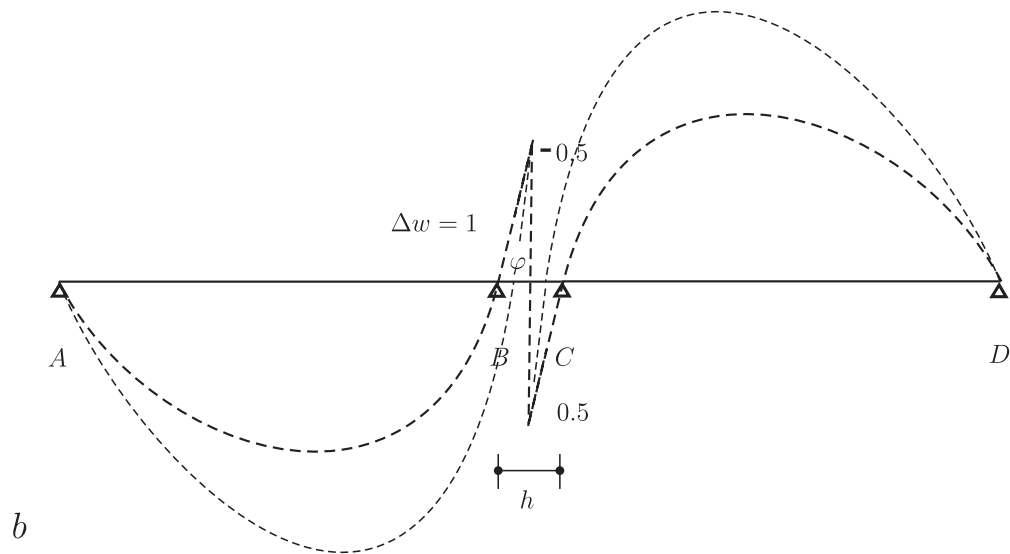
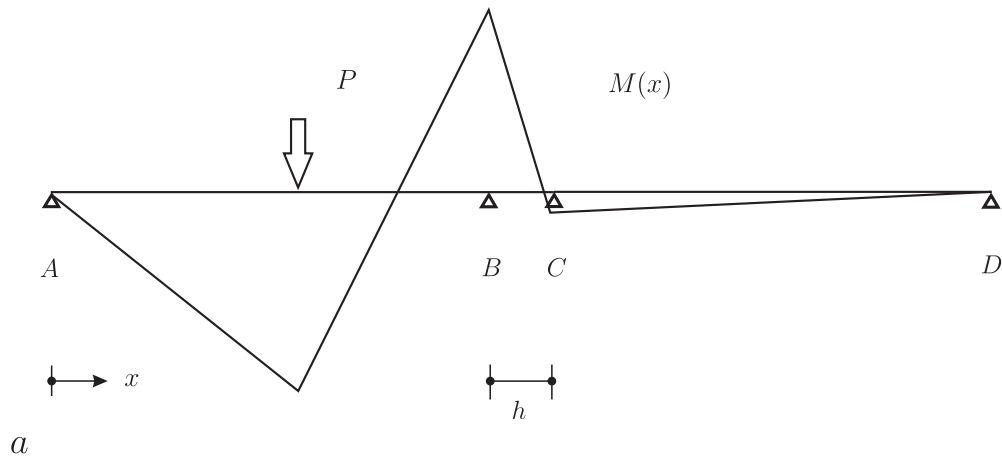


Abbildung 39: Einflussfunktion für die Querkraft in der Mitte des zweiten Feldes. Die Einflussfunktion schlägt in den Nachbarfeldern umso stärker aus je kleiner der Abstand  $h$  der Innenlager ist. Bei einem Abstand  $h = 0$  wölbt sie sich bis auf  $\pm\infty$



## 1.25 Mängel in der Konstruktion

Wenn es zu 'merkwürdigen Ergebnissen' kommt, dann muss der Fehler nicht immer beim Programm liegen. Es kann auch an der Konstruktion liegen. Zwei Beispiele sollen dies veranschaulichen.

### 1.25.1 Ungewollte Einspannung in einer Platte

Zur Einführung betrachten wir die Einflussfunktion für die Querkraft eines Durchlaufträgers in der Mitte des zweiten Feldes, s. Bild 39. Je näher die beiden Innenlager zueinander rücken,  $h \rightarrow 0$ , desto weiter wölbt sich die Einflussfunktion in den Nachbarfeldern nach unten und nach oben, weil durch den immer gleich bleibenden Versatz von  $\Delta w = 1$  im mittleren Feld, die Tangenten an die Biegelinie sich immer steiler aufstellen. Das bedeutet: Wenn nur das erste Feld belastet ist, dann geht die Querkraft bei schrumpfenden Abstand der Innenlager gegen Unendlich! Anschaulich ist es so, dass das mittlere, extrem kurze Feld wie eine Volleinspannung wirkt und das Einspannmoment von zwei gegengleichen Kräften aufgebracht werden muss, die den Abstand  $h = 0$  haben.

Genau diese ungewollte Einspannung hat der Architekt durch einen Versatz der Innenwände erzeugt, s. Bild 40. Durch Randlasten wird die Platte über die zueinander versetzten Innenwände gebogen und dabei entsteht ein Biegemoment, das an den Enden der Innenwände zu steil ansteigenden Lagerkräften führt, die von der Platte nicht mehr aufgenommen werden können. Der Fehler liegt hier also in der Konstruktion.

### 1.25.2 Knicke in der Einspannung

Auf den ersten Blick harmlose, kleine Knicke im Verlauf eines Lagers, kleine Abweichungen von der 'Ideallinie', können das Tragverhalten einer Platte entscheidend verändern. Von daher ist es wichtig darauf zu achten, dass die Wände und Lager 'in der Flucht' stehen.

Ein bemerkenswertes Beispiel dafür ist die Platte in Bild 41, die den Boden eines Wasserauslasses bildet. Um die Krümmung des Randes nachzubilden, musste der Tragwerksplaner den Rand mit einem Polygonzug nachbilden. Dabei hat er das Ende des Randabschnitts Nr. 2 um ein kleines Maß zu viel nach rechts verzogen. Dadurch kam es zu einem kleinen zusätzlichen Knick zwischen Randabschnitt 1 und 2 mit fatalen Folgen für die Einspannmomente, s. Bild 41 b. Offensichtlich werden die Einspannmomente am Knick singulär. Das sieht man auch sehr schön, wenn man die Einflussfunktion für das Einspannmoment kurz oberhalb der Ecke, Bild 42 a, und kurz unterhalb der Ecke, Bild 42 b, betrachtet. Hier findet bei kürzestem Abstand ein Vorzeichenwechsel in der Einflussfunktion statt!

Das Gegenmittel ist, den zu groß geratenen Knick zu korrigieren. Dazu war es nur nötig einen Knoten um 1 cm zu verschieben! Berechnet man jetzt die Einflussfunktionen für die oben genannten Biegemomente, dann ist von dem Vorzeichenwechsel nichts mehr zu sehen und die FE-Ergebnisse sind in Ordnung.

## 1.26 Gleichgewicht

In vielen Büchern über finite Elemente findet man Sätze wie

- *Das globale Gleichgewicht ist erfüllt.*

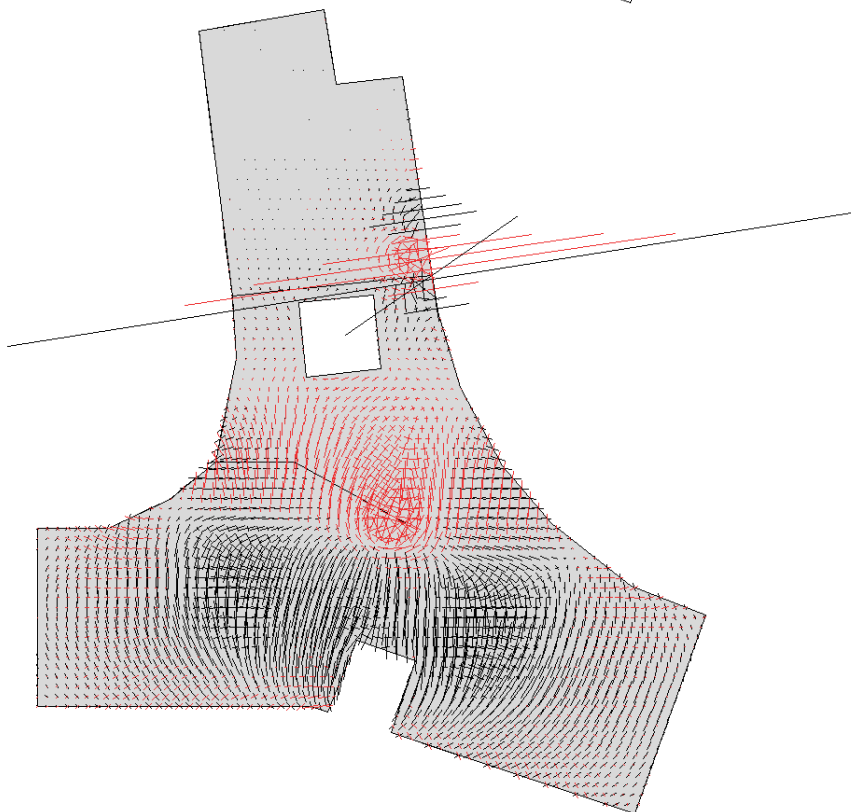
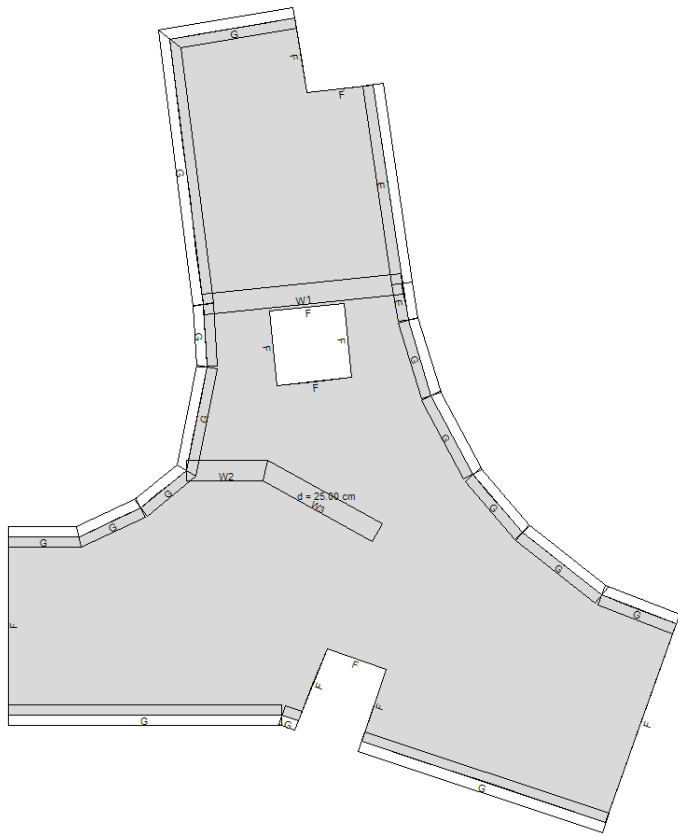


Abbildung 41: Wasserauslass und Hauptmomente

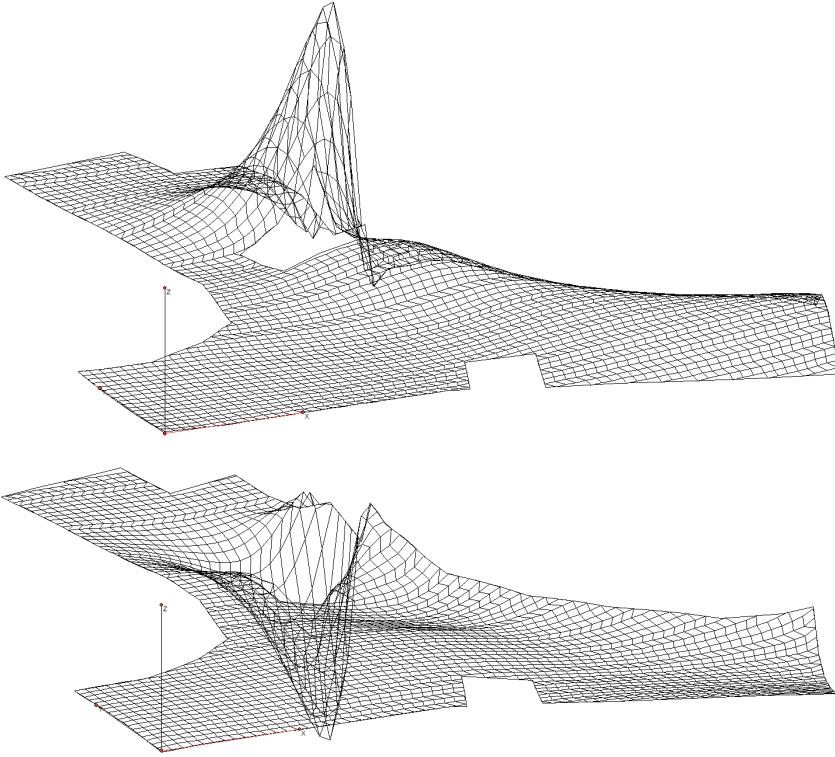


Abbildung 42: Einflussfunktion für das Einspannmoment oberhalb und unterhalb des Knicks in der Wand

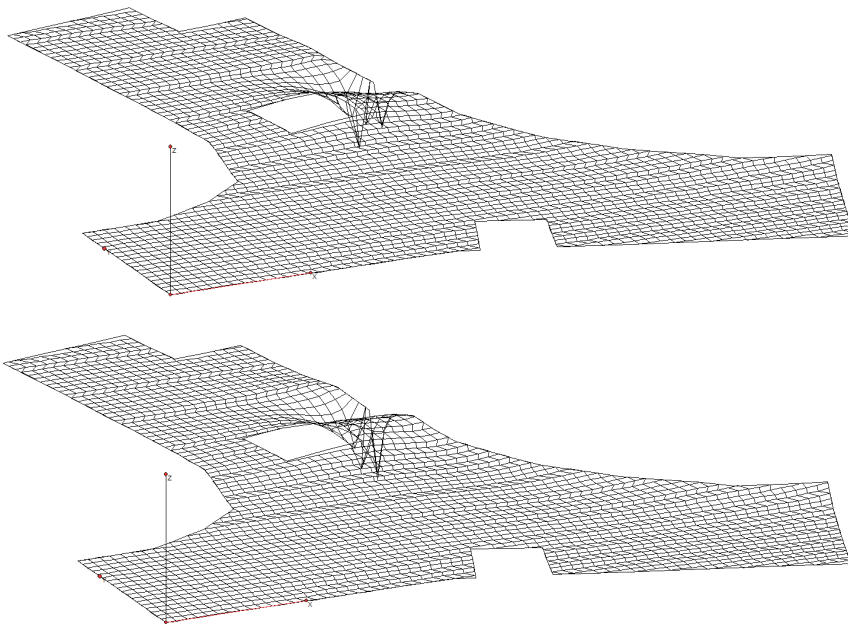


Abbildung 43: Einflussfunktion für das Einspannmoment oberhalb und unterhalb des begradigten Knicks in der Wand

- *Das Gleichgewicht im Element ist nicht erfüllt.*
- *Das Gleichgewicht an den Elementrändern ist nicht erfüllt.*
- *Das Gleichgewicht an den Knoten ist erfüllt. (?)*

Diese Sätze stärken nicht das Vertrauen des Anwenders in die Methode der finiten Elemente, aber sie verlieren doch viel von ihrer Dramatik, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass die Methode der finiten Elemente im gewissen Sinn ein Ersatzlastverfahren ist. Die Schnittkräfte, die ein FE-Programm ausgibt, gehören zum äquivalenten Lastfall  $p_h$ , und daher ist es (aus Sicht der FEM) ganz natürlich, dass nichts passt, wenn man über Kreuz vergleicht: Die Schnittkräfte eines Lastfalls A sind in der Regel nie im Gleichgewicht mit den Lasten eines Lastfalls B.

Ein FE-Programm begeht nur *einen* Fehler, den ihm ein Prüfenieur anlasten könnte, und den begeht es gleich zu Anfang: Es ersetzt den Originallastfall durch einen äquivalenten Lastfall. Alles andere aber, was danach kommt, ist klassische Baustatik im Sinne des Regelwerkes. Das FE-Programm löst den äquivalenten Lastfall *exakt*. Daher ist das ganze Tragwerk und jedes Teilsystem im Gleichgewicht – mit den Lasten des äquivalenten Lastfalls, [8].

Eine der elementarsten Proben bei einer FE-Berechnung ist es, die Lagerkräfte mit der eingegebenen Belastungen zu vergleichen. Wenn nun aber das FE-Programm doch einen anderen Lastfall löst, warum stimmen dann die Lagerkräfte überein? Die Lagerkräfte stimmen nicht punktweise über, sondern nur die Summe  $V$  stimmt überein. Das liegt daran, dass die Resultierende des Ersatzlastfalls  $p_h$  nach Lage, Richtung und Größe mit der Resultierenden des Originallastfalls übereinstimmt. Dies muss übrigens auch schon auf dem größten Netz gelten. Von daher ist diese Kontrolle zwar unbedingt notwendig, aber sie sagt nichts über die Qualität einer FE-Berechnung aus.

Eher verdient der folgende Punkt Erwähnung, nämlich die Tatsache, dass die Lasten aus dem Eigengewicht oder anderen Vollasten bei Platten und Scheiben nie zu 100 % in eine FE-Berechnung eingehen.

Dadurch, dass die Belastung in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet wird, wandert ein Teil des randnahen Eigengewichts direkt als Knotenkräfte in die Lagerknoten, führt also nicht zu Schnittkräften. Man darf daher theoretisch den Schubspannungsnachweis nicht mit den rechnerischen Querkräften in Elementmitte führen, sondern muss theoretisch die Knotenkräfte am Rand in Lagerkräfte umrechnen und den Schubnachweis mit diesen Querkräften führen.

Es sei bei dieser Gelegenheit auch noch einmal deutlich darauf hingewiesen, dass das FE-Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{8}$$

nicht das Gleichgewicht der Kräfte an den Knoten formuliert. Hier werden nicht Kräfte gleichgesetzt, sondern Arbeiten! Der FE-Lastfall  $p_h$  wird so eingestellt, dass er bei jeder virtuellen Verrückung der Knoten dieselbe Arbeit leistet wie der Originallastfall  $p$ . Das ist die Bedeutung dieser Gleichungen.

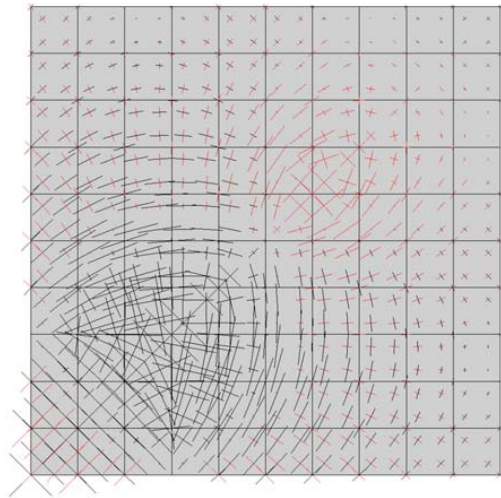
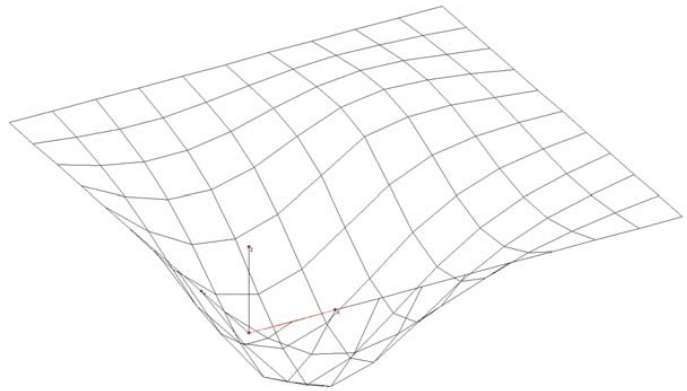
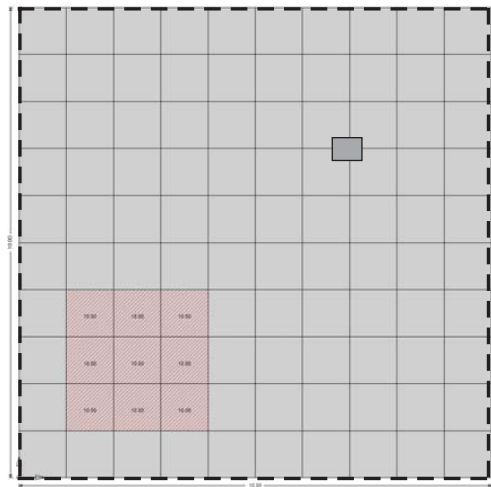


Abbildung 44: Berechnung einer gelenkig gelagerten Platte mit Innenstütze mit finiten Elementen

-0.04	-0.11	-0.17	-0.19	-0.10	0.12	0.13	-0.04	-0.10	-0.04
-0.10	-0.29	-0.44	-0.55	-0.41	0.40	0.44	-0.27	-0.29	-0.10
-0.15	-0.39	-0.50	-0.61	-1.13	0.71	0.74	-0.98	-0.27	-0.04
-0.15	-0.41	-0.36	0.14	0.75	-2.10	-2.17	0.74	0.44	0.13
-0.03	-0.32	-0.25	0.34	1.20	-1.79	-2.10	0.71	0.40	0.12
0.60	0.27	0.63	0.18	0.15	1.20	0.75	-1.13	-0.41	-0.10
0.50	2.64	2.87	2.26	0.18	0.34	0.14	-0.61	-0.55	-0.19
1.05	3.30	4.03	2.87	0.63	-0.25	-0.36	-0.50	-0.44	-0.17
0.60	2.96	3.30	2.64	0.27	-0.32	-0.41	-0.39	-0.29	-0.11
0.62	0.60	1.05	0.50	0.60	-0.03	-0.15	-0.15	-0.10	-0.04

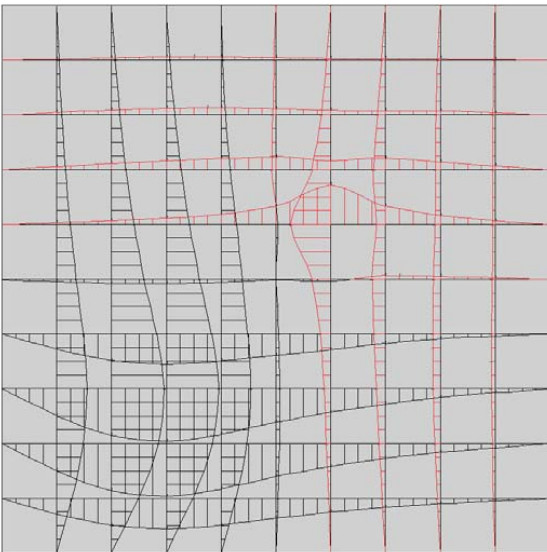
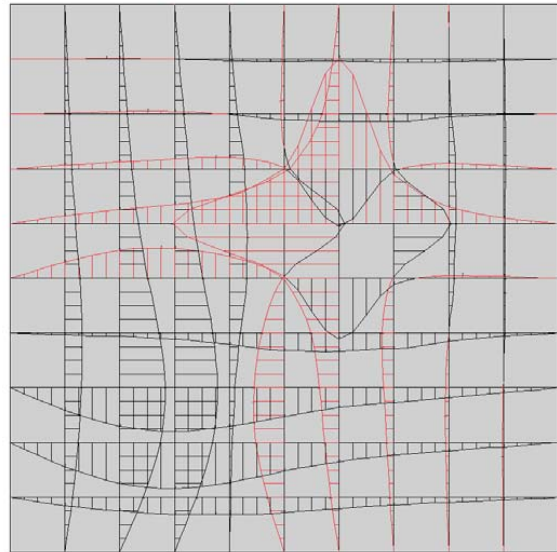


Abbildung 45: Der FE-Lastfall **a)** Elementlasten **b)** Linienlasten längs den Elementkanten und **c)** Linienmomente längs den Kanten

## 1.27 Die Konsequenzen für die Statik

Zum Schluss kommen wir noch einmal auf den zentralen Satz zurück:

- Der Tragwerksplaner, der ein FE-Programm benutzt, bemisst das Tragwerk für den FE-Lastfall  $p_h$ .

Und nicht, so muss man ergänzen, für den Originallastfall. In keiner Statik taucht dieser FE-Lastfall  $p_h$  auf. Soll man also jetzt zur Pflicht machen, dass bei jeder FE-Berechnung der FE-Lastfall  $p_h$  dokumentiert wird?

Wir zögern an dieser Stelle, denn man muss auch die Gefahren sehen, die in einem direkten Vergleich der beiden Lastfälle, des Originallastfalls  $p$  und des gerechneten Lastfalls  $p_h$  lauern. Wenn man sich einmal die Mühe gemacht, und die beiden Lastfälle miteinander vergleicht, dann ist man erschrocken, wie wenig die beiden Lastfälle miteinander zu tun haben, s. Bild 44 und 45.

Eigentlich sind nur neun Elemente der Platte mit  $10 \text{ kN/m}^2$  belastet. Das FE-Programm rechnet dagegen überall mit Flächenlasten, die jedoch in ihrer Größe variieren und deutlich kleiner sind als die  $10 \text{ kN/m}^2$ . Zusätzlich wirken aber noch längs den Elementkanten Linienkräfte und Linienmomente. Also doch ein andere Verteilung von Lasten, als die, die eigentlich zu berechnen war. Wenn man jedoch auf die Hauptmomente schaut, siehe Bild 44 c, und nicht wüsste, wo diese Hauptmomente eigentlich herkommen, dann würde man sagen: 'Ja, das passt'. Das sind annähernd die Hauptmomente, die zu der Originalbelastung in Bild 44 a gehören.

Offensichtlich, so müssen wir schließen, kann man dasselbe Ziel auf verschiedenen Wegen erreichen. Und davon profitieren die finiten Elemente. Scheinbar ganz unterschiedliche Lasten führen zu demselben Tragbild.

Wir wollen hier an die Bemerkungen anknüpfen, die wir in [8] zu diesem Thema gemacht haben:

'... wenn wir als Tragwerksplaner mehr Zutrauen zu den finiten Elementen gewinnen wollen, dann müssen wir uns mit diesem Punkt intensiver auseinandersetzen. Dies ist ein Problem der *Statik* und erst in zweiter Linie ein Problem der numerischen Mathematik.

Was heißt *nah* und *fern* in der Statik? Welche Unschärfe können wir uns in der Statik erlauben und welche nicht?<sup>3</sup>

Was wir – etwa bei einer Plattenberechnung – sehen und vergleichen können sind die Lasten, das  $p$  und das  $p_h$ , also – wir vereinfachen etwas – die vierten Ableitungen der Biegefläche. Die Schnittmomente aber sind die zweiten Ableitungen, also das zweifach unbestimmte Integral der Belastung

$$m = \int \int p \, d\Omega \, d\Omega, \quad m_h = \int \int p_h \, d\Omega \, d\Omega.$$

Bei der Integration werden die Oszillationen in den Lasten geglättet, und so kommt es, dass die Schnittmomente der FE-Lösung relativ gut den exakten Momenten folgen. Das ist der

---

<sup>3</sup>Man lese den Aufsatz von Bürg und Schneider [2] über die Bemessung einer einfachen Garagendecke durch 32 verschiedene Ingenieure!

mathematische Hintergrund. Integration ist ein Glättungsprozess, und kein Prüfingenieur kann aus der Differenz der Lasten Aussagen über die Differenz der Schnittmomente machen. Wenn im Dachgeschoß, in der vierten Etage, die Wände 20 cm aus der Flucht stehen, wer will dann sagen, wie groß die Abweichung im zweiten Geschoß ist? Den Abstand im Dachgeschoß können wir messen. Die Abweichung im zweiten Geschoß nicht. Über sie können wir nur spekulieren. Das ist das Problem.' [Ende Zitat]

Nun ist es aber natürlich nicht so, dass das FE-Programm den Originallastfall durch einen willkürlich gewählten Lastfall ersetzt, sondern der FE-Lastfall  $p_h$  ist eng auf den Originallastfall abgestimmt; Er ist wackeläquivalent zu dem Originallastfall. Bei jeder durch die Knotenverschiebungen darstellbaren virtuellen Verrückung des FE-Tragwerkes sind die virtuellen Arbeiten in den beiden Lastfällen gleich groß. Die beiden Lastfälle sind also schon aufeinander abgestimmt. Nur sieht man das nicht auf dem Bildschirm.

Unser Auge misst die Fläche zwischen der Originalbelastung und FE-Belastung, es hält sozusagen die Differenz  $|p - p_h|$  gegen die Eins

$$\int_0^l |p - p_h| \cdot 1 \, dx .$$

Es misst die Resultierende  $R$  der absolut genommenen Fehlerkräfte, oder, was wegen  $R \times 1 = R$ , dasselbe ist: Es schätzt die Arbeit ab, die die Beträge der Fehlerkräfte auf der virtuellen Verrückung  $\delta w = 1$  leisten.

Das FE-Programm hält dagegen die Fehlerkräfte gegen *alle* Einheitsverformungen der Knoten und versucht all diese virtuellen äußeren Arbeiten zu Null zu machen

$$\delta A_a = \int_0^l (p - p_h) \varphi_i \, dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Beim Blick auf die Fehlerkräfte  $p - p_h$  muss man also mitdenken. Es wäre sicherlich zu naiv, die Fehlerkräfte *prima facie* zu nehmen, sich darauf zu versteifen, dass das Lastbild  $p_h$  der FE-Lösung möglichst ‚gut‘ aussieht, denn das Auge operiert nur mit einer virtuellen Verrückung,  $\varphi = 1$ , ein FE-Programm dagegen mit 10, 100 oder 1000 Einheitsverformungen  $\varphi_i$ , und man muss einem FE-Programm zu gute halten, dass es mitdenkt, dass es versucht den Ersatzlastfall  $p_h$  so optimal einzustellen, dass der Fehler in der Energie – also das Fehlerquadrat der Schnittkräfte – möglichst klein wird.

Soll man also den FE-Lastfall  $p_h$  gar nicht zeigen, weil das den Nicht-Fachmann nur verwirren würde? Wir meinen nicht. Erstens ist es so, dass die adaptiven Verfahren sich genau an diesem Lastfall  $p_h$  orientieren, also das Netz dort verfeinern, wo die Differenz  $p - p_h$  groß ist, und dass man zum zweiten als Tragwerksplaner durch die Darstellung des Lastfalls  $p_h$  auf die *hot spots*, auf die Punkte wo es ‚klemmt‘ hingewiesen wird.

Und vielleicht hätte die Darstellung des FE-Lastfall  $p_h$  das Gute, dass der naive Dogmatismus vieler Ingenieure einer etwas aufgeklärteren, lockeren Sicht der Dinge weichen würde. Der Gewinn an Bandbreite würde alle Mal den scheinbaren Verlust wettmachen. Es ist höchste Zeit, dass die praktische Baustatik im 21. Jahrhundert ankommt. Mit dem Knotenkraft-Modell der finiten Elemente, siehe das Eingangsbeispiel und das dazugehörige Ingenieurmodell in Bild 1 c, lässt sich die Zukunft nicht gewinnen. Das ist zu kurz gesprungen. Die Baustatik hat besseres verdient.

# Literatur

- [1] Barth C, Rustler W (2010) Finite Elemente in der Baustatik Praxis, Bauwerk Verlag Berlin
- [2] Bürg, M., J. Schneider, Variability in Professional Design, Strct. Engineering Intern. 1994, 247-250
- [3] Enseleit J (1999) Strukturmechanische Analyse des Entstehens von Bauwerken, Werner Verlag Düsseldorf
- [4] Gensichen V (2010) “Die Qualitätssicherung von EDV-Programmen und die Suche nach der Realität”, Der Prüflingenieur Oktober 2010 (ISSN 1430-9084)
- [5] Grätsch T, Hartmann F, Katz C, “Einflussfunktionen und finite Elemente”, Bauingenieur, 78, (2003)
- [6] Grätsch T, Hartmann F (2004) “Duality and finite elements”, Finite Elements in Analysis and Design, 40: 1005–1020
- [7] Graf W, Vassilev T (2006) Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik, Ernst & Sohn Berlin
- [8] Hartmann F, Katz C (2002) Statik mit finiten Elementen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [9] Hartmann F, Katz C (2007) Structural Analysis with Finite Elements, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage
- [10] Kindmann R, Kraus M (2007) Finite-Element-Methoden im Stahlbau, Ernst & Sohn Berlin
- [11] Morris A, (2008) A Practical Guide to Reliable Finite Element Modelling, John Wiley & Sons Inc. Oxford
- [12] Rombach G (2006) Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau, Ernst & Sohn Berlin, 2. Auflage
- [13] Sopoht M, Sopoht G (2008) Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise, Diplomarbeit Universität Kassel
- [14] Takunov B (2010) Sensitivitätsanalyse mittels Einflussfunktionen, Masterarbeit Universität Kassel
- [15] Werkle H (2007) Finite Elemente in der Baustatik, Vieweg Verlag Wiesbaden 3. Auflage