

WP 17-19,22-23

Forschungsprojekt
Tragwerk-FMEA

Institut für Statik und Dynamik
der Universität Kassel

20.12.2010

Sensitivitätsanalyse von Tragwerken

Dieser Bericht informiert über die Grundlagen der Sensitivitätsanalyse von Tragwerken mittels finiten Elementen und Einflussfunktionen und zeigt auf, wie die Sensitivitätsanalyse dazu eingesetzt werden kann Fragen wie

- Was ist der maßgebende Lastpfad in einem Tragwerk?
- Wie sieht der kritische Pfad (Kollaps) aus?
- Wie ändern sich die Schnittkräfte, wenn sich die Steifigkeiten ändern?
- Wie empfindlich reagiert das Tragwerk auf Risse im Beton?
- Wie hängen die Spannungen an den höchst beanspruchten Stellen von den Steifigkeiten der benachbarten Bauteile ab?
- Welche Auswirkungen hat der Ausfall einer Stütze auf das Tragwerk?
- Wie groß ist der Einfluss der Bodensteifigkeit auf den Überbau?

zu beantworten.

Sensitivitätsanalyse von Tragwerken

Dieser Bericht informiert über die Grundlagen der Sensitivitätsanalyse von Tragwerken mittels finiten Elementen und Einflussfunktionen und zeigt auf, wie die Sensitivitätsanalyse dazu eingesetzt werden kann Fragen wie

- Was ist der maßgebende Lastpfad in einem Tragwerk?
- Wie sieht der kritische Pfad (Kollaps) aus?
- Wie ändern sich die Schnittkräfte, wenn sich die Steifigkeiten ändern?
- Wie empfindlich reagiert das Tragwerk auf Risse im Beton?
- Wie hängen die Spannungen an den höchst beanspruchten Stellen von den Steifigkeiten der benachbarten Bauteile ab?
- Welche Auswirkungen hat der Ausfall einer Stütze auf das Tragwerk?
- Wie groß ist der Einfluss der Bodensteifigkeit auf den Überbau?

zu beantworten.

Die Sensitivitätsanalyse hat das Ziel, FE-Programme dahingehend zu erweitern, dass sie nicht nur reine Rechenergebnisse liefern, sondern im Sinne der FMEA auch in der Lage sind, einen Tragwerksentwurf als Ganzes zu beurteilen, Abhängigkeiten zu entdecken, Lastpfade darzustellen, die Verfolgung von Tragwerksänderungen zu ermöglichen und so den Tragwerksplaner auf mögliche Schwachstellen bzw. Gefahren hinzuweisen.

Inhaltsverzeichnis

1	Sensitivitätsanalyse von Tragwerken	2
1.1	Validierung, Verifizierung und Einflussfunktionen	4
1.2	Wie wird die Sensitivitätsanalyse angewandt?	7
1.3	Implementierung der Sensitivitätsanalyse	8
1.4	Änderungen von Steifigkeiten	9
1.5	Kurze Einführung	11
1.6	Anwendungsskizze—Frage 1	14
1.7	Anwendungsskizze—Frage 2	15
1.8	Rechentechnische Umsetzung	18
1.9	Nachgiebige Lager	21
1.10	Kollaps von Tragwerken—kritischer Pfad	23

1 Sensitivitätsanalyse von Tragwerken

Vor 60 Jahren wurden zum ersten Mal finiten Elemente zur Analyse von Tragstrukturen eingesetzt. Verliep die Entwicklung am Anfang zunächst langsam, so hat die stetig zunehmende Leistungsfähigkeit der Computer und der Software und die Tatsache, dass man plötzlich Tragwerke berechnen konnte, die zuvor keiner echten Analyse zugänglich waren, der Methode zu einem Siegeslauf durch die Ingenieurbüros verholfen.

Aber mit dem Erfolg kam auch die Kritik. Es wurde deutlich, dass das Wissen der Ingenieure über die Methode nicht mit ihrem Erfolg Schritt hielt. Prüflingenieure klagten und klagen darüber, dass die Methode oft ohne Sinn und Verstand von den Ingenieuren eingesetzt wird, dass eine kritische Evaluierung der Berechnungsergebnisse oft fehlt und das Wissen über die Grenzen der Methode bei den Aufstellern sehr rudimentär sind.

Gleichzeitig hat der Umfang der zu führenden statischen Nachweise und der Aufwand, den man für diese Nachweise führen muss, in den letzten Jahren immer mehr zugenommen. Die Überlagerungsvorschriften z.B. sind inzwischen so kompliziert geworden, dass ein Programm für die Ermittlung der maximalen Schnittkräfte ein Vielfaches an der Zeit braucht, die es zur Analyse der Lastfälle braucht. Und der Aufsteller kann kaum noch nachvollziehen, aus welcher Lastfallkombination nun die Extremwerte kommen, die das Programm ausdrückt und welche Kombinationsbeiwerte in den maßgebenden Werten stecken.

Diesem Phänomen überlagert sich ein weiterer Effekt: Früher wurden Standsicherheitsnachweise so geführt, dass man ein Tragwerk in einzelne, überschaubare Tragglieder unterteilte, und diese dann getrennt betrachtete. Dies hatte den Vorteil, dass die Statik relativ leicht kontrollierbar war und gut überschaubar. Heute dagegen werden Standsicherheitsnachweise zunehmend am Gesamtmodell geführt und die dabei anfallenden großen Datenmengen erhöhen die Intransparenz weiter.

So sprach ein Aufsteller in einem Statik-Seminar von 'Blindflug' beim Nachweis einer kleinen Überführung aus Spannbeton, weil er nicht nachvollziehen konnte, wie das Programm auf die Extremwerte gekommen war, und ein anderer Aufsteller, der einen ganzen Straßenblock als eine Struktur analysierte, gestand offen, dass er nicht mehr wusste wo die Kräfte hinliefen'. Die Situation wird dadurch verschärft, dass eigentlich unverzichtbare Kontrollen seitens der Aufsteller oft aus Zeitdruck unterbleiben.

Die zunehmende Leistungsfähigkeit der FE-Software hat zu einer paradoxen Situation in der Statik geführt: Wir sind heute in der Lage selbst komplexeste Bauwerke mit modernen Statikprogrammen zu analysieren, aber gleichzeitig führt diese immer mehr überhandnehmende Abhängigkeit vom Computer zu immer mehr Intransparenz. Die Tendenz zur 3-D Statik, die Tendenz ganze Tragwerke 'en bloc' in einem Computermodell zu analysieren, macht es für den Prüflingenieur immer schwieriger Statiken zu kontrollieren.

Gerade die jungen Ingenieure vertrauen dem Computer grenzenlos und verzichten oft auf die elementarsten Prüfungen der Ergebnisse, weil sie nicht mehr die Nähe zu dem Tragwerk

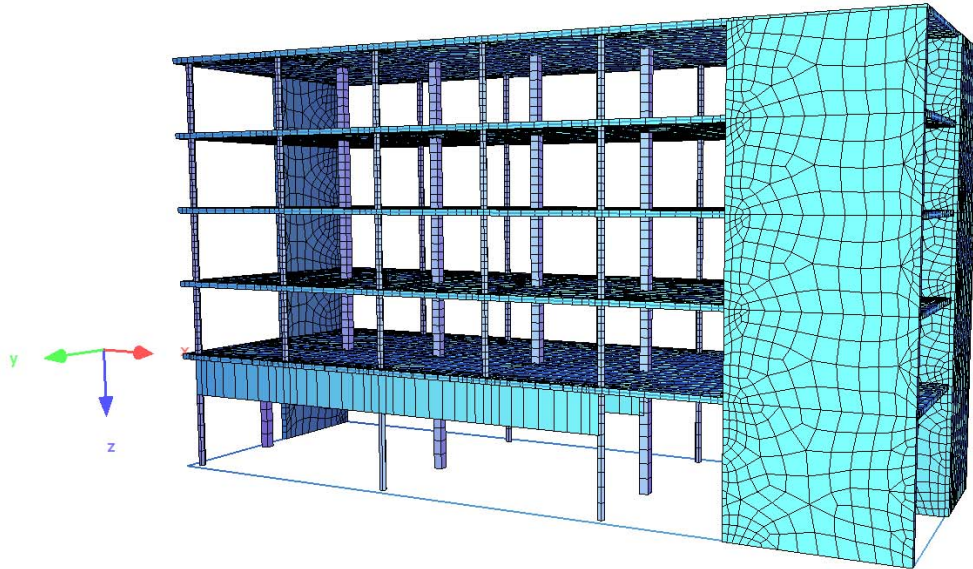


Abbildung 1: Bürogebäude

haben, die der entwerfende Ingenieur vor 30 Jahren noch hatte.

Aber auch der Tragwerksplaner, der mit 2-D-Modellen arbeitet, steht vor ähnlichen Fragen, wenn im Erdgeschoss eine Wand verrückt wird, und er abschätzen muss, welche Konsequenzen das für die oberen Geschosse hat. Dann muss er ein Gefühl für das Tragwerk haben, muss abschätzen können, wie die Kräfte laufen, ob die Änderung für das Tragverhalten unwesentlich ist oder ob die Statik ganz neu aufgestellt werden muss. Er muss in der Lage sein, die wesentlichen Tragwirkungen zu verstehen und die Interaktion zwischen den unterschiedlichen Teilen des Tragwerkes zu erfassen um daraus Vorteile in Bezug auf Sicherheit, Architektur und Wirtschaftlichkeit zu ziehen.

Wenn die Lage aber so ist, wenn die Transparenz in der Statik trotz oder wegen des Computers verloren geht, warum sollen wir dann nicht den Computer auch dazu benutzen, sich selbst und den Tragwerksentwurf zu kontrollieren bzw. dem jungen Tragwerksplaner im Sinne eines *senior engineers* zur Seite zu stehen. Die Eingabe bei den ersten Rechner geschah mittels Lochkarten und das Ergebnis waren lange Listen, lange Zahlenkolonnen. Dann kam die Visualisierung, die anschauliche und farbige Darstellung der Ergebnisse. Dann hat man entdeckt, dass sich FE-Programme selbst korrigieren können, die adaptive Verfeinerung der Netze wurde implementiert (wenn auch nicht im Bauwesen).

Nun müssen wir den nächsten Schritt tun: Wir müssen die Computer selbst dazu benutzen, das Tragwerksmodell zu validieren und auf Schwachstellen im Entwurf hinzuweisen. Das wäre sozusagen der Übergang von einer rechnerischen Statik zu einer qualitativen Statik. Uns scheint dieser Schritt nun geboten.

Das Werkzeug hierzu ist die Sensitivitätsanalyse von Tragwerken mittels Computern.

Die Sensitivitätsanalyse hilft die folgenden Fragen zu beantworten:

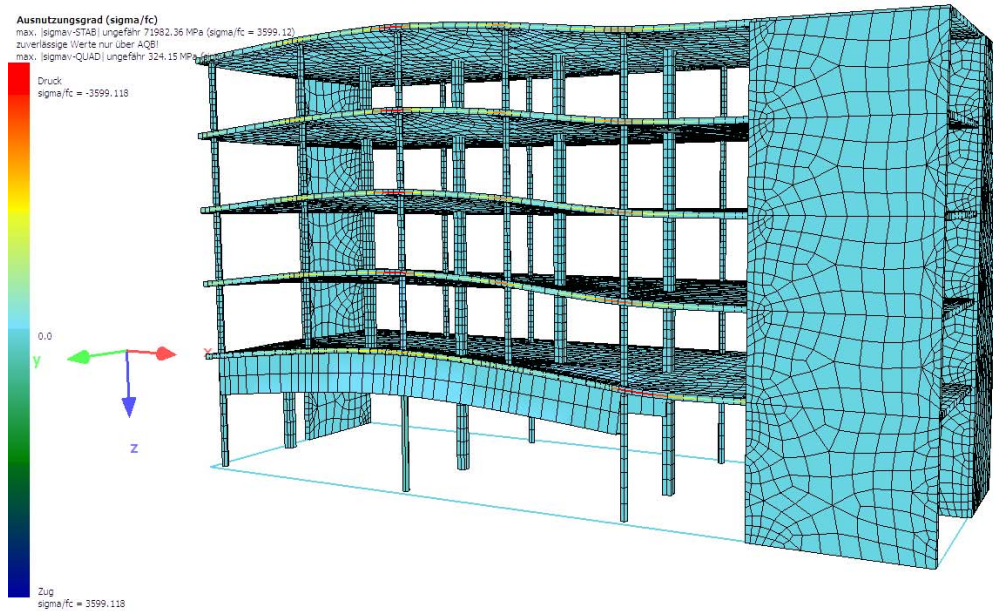


Abbildung 2: Bürogebäude: Einflussfunktion für eine der Stützen im Erdgeschoss

- Was ist der maßgebende Lastpfad in einem Tragwerk?
- Wie sieht der kritische Pfad (Kollaps) aus?
- Wie ändern sich die Schnittkräfte, wenn sich die Steifigkeiten ändern?
- Wie empfindlich reagiert das Tragwerk auf Risse im Beton?
- Wie hängen die Spannungen an den höchst beanspruchten Stellen von den Steifigkeiten der benachbarten Bauteile ab?
- Welche Auswirkungen hat der Ausfall einer Stütze auf das Tragwerk?
- Wie groß ist der Einfluss der Bodensteifigkeit auf den Überbau?

Das Werkzeug zur Beantwortung dieser Fragen sind Einflussfunktionen.

1.1 Validierung, Verifizierung und Einflussfunktionen

Die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse hängt von zwei Faktoren ab, dem so genannten Diskretisierungsfehler, und dem Modellfehler. Die Diskretisierungsfehler ist der Fehler, den man macht, wenn man, vereinfacht gesagt, das Netz zu grob wählt, und der Modellfehler, ist der Fehler den man begeht, wenn man die Steifigkeiten falsch ansetzt.

Zur Kontrolle des Diskretisierungsfehler gibt es heute eine ganze Reihe von Techniken, Stichwort: adaptive Methoden, so dass dieses Thema an dieser Stelle nicht weiter erläutert werden muss. Anders ist es mit dem Modellfehler. Nicht richtig erfasste Steifigkeiten, falsch modellierte Bauteile, falsch angesetzte Lagerbedingungen, et cetera., verfälschen Ergebnisse auch dann, wenn theoretisch die zu Grunde liegenden Gleichungen exakt gelöst werden.

In engem Zusammenhang mit dem Modellfehler, steht die Frage nach der Robustheit einer Konstruktion. Ist das Tragwerk in der Lage, kleinere Schwächungen oder Variationen in den Steifigkeiten aufzufangen, oder kommt es zum Kollaps? Werden solche wackligen' Konstruktionen mit finiten Elementen berechnet, dann kann eine ungünstige Kombination von Diskretisierungsfehler und Modellfehler eine Sicherheit vortäuschen, die gar nicht vorhanden ist.

Es ist daher an der Zeit, zu einer qualitativen Statik zu kommen, die Schwachpunkte einer Konstruktion mit dem Rechner zu erkennen, die Sensitivität eines Tragwerks in Zahlen zu fassen, und damit dem Aufsteller mitteilen zu können wie wichtig die einzelnen Bauteile für die Standsicherheit eines Tragwerks sind, wie mögliche Kollapsszenarien aussehen, und welche Details eines Tragwerkes der besonderen Aufmerksamkeit des Ausstellers bedürfen.

Natürlich sieht der erfahrene Tragwerksplaner die Schwachpunkte einer Konstruktion auch so, er braucht dazu keinen Computer. Aber es geht darum, die rein numerische Ebene zu verlassen und zu einer Stufe der Computerstatik zu kommen bei der der Rechner auch etwas über die Qualität der Ergebnisse mitteilen kann und der Rechner in die Lage versetzt wird, die Schwachstellen einer Konstruktion zu erkennen und den Aufsteller darauf aufmerksam zu machen.

Die bisherigen Forschungsansätze, die sich mit der Robustheit von Tragwerken beschäftigen, beruhen meist auf stochastischen Verfahren und führen dann meist über eine Variation der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix zu numerisch sehr aufwändigen Untersuchungen (Monte-Carlo Verfahren'). Das wesentliche Werkzeug bei der hier vorgeschlagenen Sensitivitätsanalyse eines Tragwerks sind dagegen die Einflussfunktionen. Beide Fehlerarten, der Diskretisierungsfehler und der Modellfehler, lassen sich auf Fehler in den Einflussfunktionen zurückführen.

Wenn die Stützenkopferschiebung einer Stütze nicht mit den gemessenen Werten übereinstimmt, dann liegt, wenn vorausgesetzt wird, dass die Differenzialgleichung exakt gelöst worden ist, ein Fehler im Modell vor: Die Einflussfunktion für die Stützenkopferschiebung, die das Modell benutzt, stimmt nicht mit der Einflussfunktion am realen Tragwerk überein.

Wenn umgekehrt, das Modell sehr gut mit dem realen Tragwerk übereinstimmt, wie das in der Stabstatik in der Regel der Fall ist, aber trotzdem die Ergebnisse vom Verhalten des realen Tragwerks abweichen, dann liegt in der Regel ein Diskretisierungsfehler vor, dann hat das FE-Programm die Einflussfunktionen nicht richtig umgesetzt.

Es ist wenig bekannt, dass ein FE-Programm jede Schnittgröße und jeder Verformung mit der zugehörigen Einflussfunktionen berechnet. Dass die Ergebnisse am Ende trotzdem falsch sind, liegt daran, dass ein FE-Programm die exakten Einflussfunktionen mit den finiten Elementen nicht exakt reproduzieren kann. Dazu ist ein FE-Netz zu ungenau, sprich es ist nicht gelenkig genug um die Ausschläge nachzuvollziehen, die zu einer Einflussfunktionen gehören.

Denn alle Einflussfunktionen sind Verformungsfiguren. Die eingeschränkte Kinematik eines FE-Netzes ist daher der Grund warum FE-Ergebnisse falsch sind. Die Sensitivitäten in einem Tragwerk, sowohl auf der statischen wie auch auf der numerischen Seite, finden also ihren Ausdruck in den Einflussfunktionen. Wie rasch klingen die Einflussfunktionen ab, welche Bauteile werden von ihnen erfasst, wie ändern sich die Einflussfunktionen, wenn die Steifig-

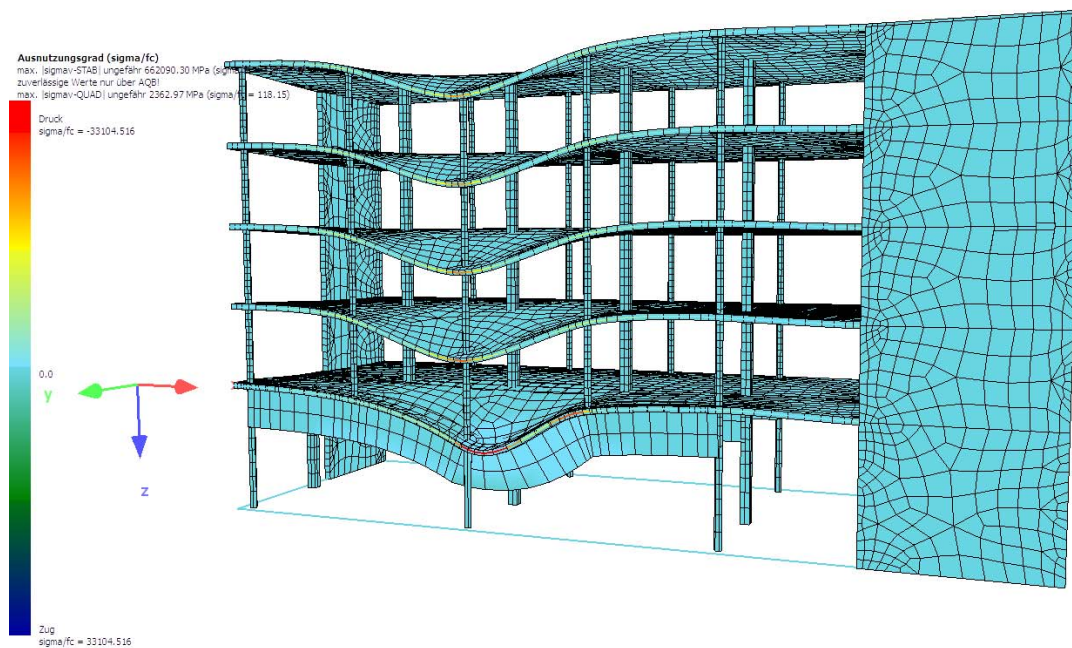


Abbildung 3: Bürogebäude: Einflussfunktion für das Moment im Unterzug

keiten in gewissen Traggliedern sich ändern, et cetera.? Dies alles ist charakteristisch für ein Tragwerk.

Über das Studium der Einflussfunktionen kann man zu qualitativen Aussagen über die Robustheit eines Tragwerks kommen, denn die Robustheit des Tragwerks ist eine Eigenschaft, die durch das globale elastische Verhalten (versteckte Kinematiken sowie energiereiche Elemente, durch die Großteil der Kräfte fließen) sowie das postkritische lokale Verhalten (spröde oder duktil) definiert ist.

Wenn auch der Übergang von der 2-D Statik zur 3-D Statik in vollem Gange ist, so werden doch heute vielfach noch Tragwerke in Einzelteile zerlegt, die dann als 2-D Strukturen berechnet werden. Wenn es dann zur Änderungen im Tragentwurf kommt, so stellt sich regelmäßig die Frage, muss nun alles neu berechnet werden, oder kann man davon ausgehen dass die Störungen, die durch die Änderungen im Tragentwurf verursacht wurden, lokal begrenzt sind? Das sind Fragen, die direkt durch das Studium der Einflussfunktionen beantwortet werden können.

In den letzten Jahren sind im Fachgebiet Baustatik der Universität Kassel die grundlegenden Beziehungen zwischen finiten Elementen und Einflussfunktionen untersucht worden. Dies betrifft die Fragen, wie ein FE-Programm die Einflussfunktionen umsetzt, welche Einflussfunktionen gut und welche Einflussfunktionen schlecht approximiert werden können, die Fragen nach der numerischen Genauigkeit der Einflussfunktionen und wie implizit FE-Programme von der Genauigkeit der numerischen Einflussfunktionen abhängen.

Insbesondere ist es gelungen, die Einflussfunktionen so zu formulieren, dass die Auswirkungen von lokalen Änderungen in den Steifigkeiten auf den Rest des Tragwerks durch eine rein lokale Analyse des gestörten Bereiches berechnet werden können.

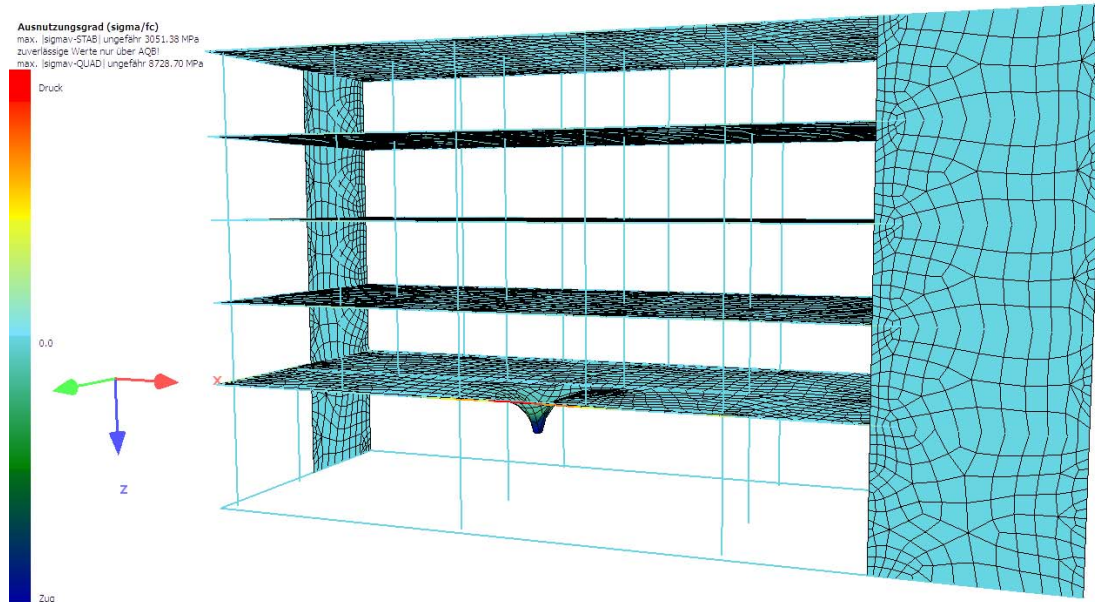


Abbildung 4: Bürogebäude: Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in einem Punkt der unteren Decke

1.2 Wie wird die Sensitivitätsanalyse angewandt?

Das Ziel der Sensitivitätsanalyse ist es, den Tragwerksentwurf zu beurteilen, zu einer Aussage über die Standsicherheit eines Tragwerks zu kommen und mögliche Schwachstellen aufzudecken.

Wie man mittels Einflussfunktionen zu qualitativen Aussagen über die Standfestigkeit einer Konstruktion kommen kann, möge die nachstehende Skizze einer Kollapsberechnung illustrieren.

Frage: Gibt es einen Gleichgewichtszustand, in dem das progressiv geschwächte Tragwerk zur Ruhe kommt?

Verfahren:

1. Automatische Vorschlagsbestimmung von kritischen Elementen anhand von Energiebetrachtung sowie versteckten Kinematiken
2. Vervollständigung der Liste der kritischen Elemente anhand der vorliegenden Ausnutzungsgrade und Wichtigkeit
3. Auswahl eines Fehlers (Modellierung als Steifigkeitsabfall) für ein kritisches Element über einen 3D-Tragwerkviewer
4. Bildung der Einflussfunktion für ausgewählte Schwächung entlang des Lastabtrages
5. Überlagerung der Schnittgrößen aus der Einflussfunktion mit maßgebendem Lastfall für Örginal-Schnittgrößen für Berechnung der Änderungen der Ausnutzungsgrade der Elemente (Unterscheidung zwischen Widerständen, die postkritisches Verhalten zulassen oder sofort versagen)

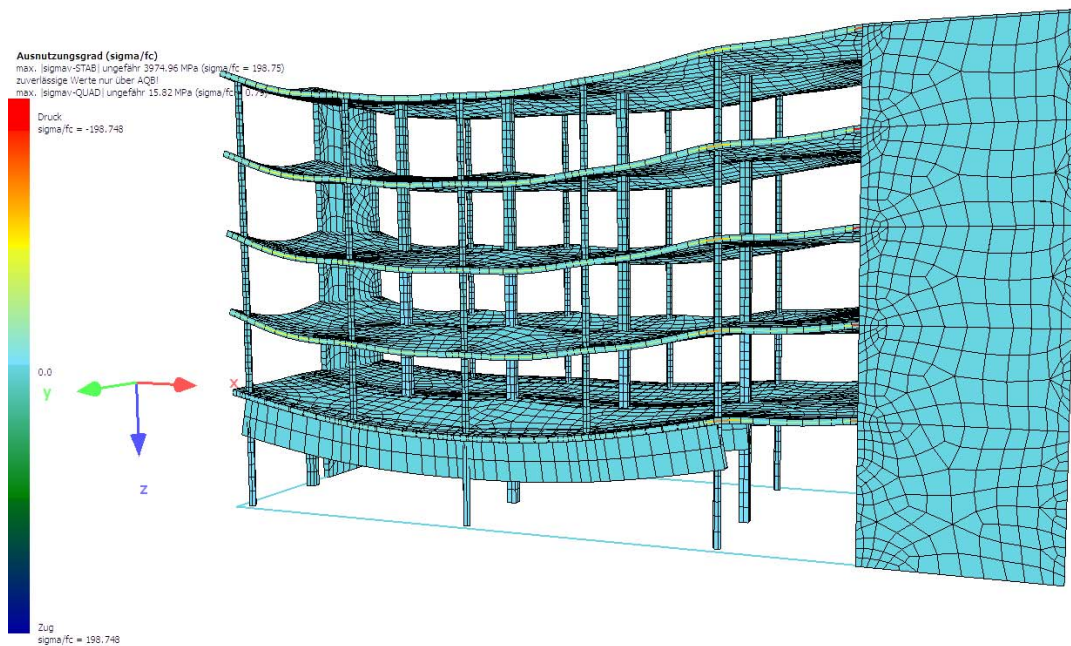


Abbildung 5: Bürogebäude: Verformung des Gebäudes nach der ersten Schwächung (Großer Steifigkeitsverlust einer Stütze im Untergeschoss)

6. Farbliche Darstellung des Lastabtrages, bei Änderungen der maßgebenden Schnittgrößen größer als 15% sowie Markierung der Bauteile, bei denen der Ausnutzungsgrad um mehr als 20% überschritten ist
7. Überprüfung, bei welchen Elementen sofortiges Versagen vorliegt und Bestimmung von kinematischen Ketten
8. Einführung von mechanischen Freiheitsgraden an den Stellen (plastisches Verhalten), die mehr als 20% überschritten sind sowie Benutzung von geänderten Versagensmodellen an diesen Stellen zur Beschreibung des Lastverformungsverhalten im postkritischen Bereich
9. Kontrolle, ob Tragwerk oder Teile davon verschieblich sind
10. Für jedes Element mit postkritischen Bereich Bildung der Einflussfunktion entlang ihrer Lastabtrages wie unter 4 und weiter wie oben

Abbruchkriterien: Verschieblichkeit des gesamten oder von Teilen des Tragwerkes.

1.3 Implementierung der Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse von Tragwerken kann nur rechnergestützt geschehen. Dies verlangt, dass auf Seiten der Softwarehäuser die dazu notwendigen Algorithmen in den Programmen implementiert werden. Wie das im einzelnen zu geschehen hat, soll in einem zusätzlichen Dokument erläutert werden. Es ist geplant, das im Anschluss an das Forschungsvorhaben die Softwarehäuser zu einem gemeinsamen Seminar eingeladen werden und dabei die Implementierung der Algorithmen erläutert wird.

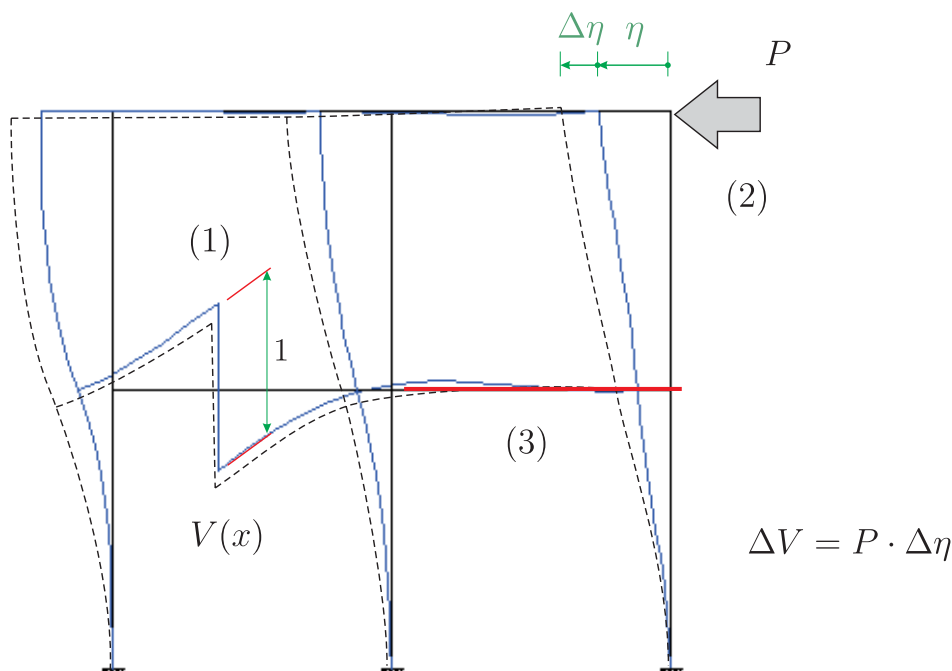


Abbildung 6: Die ganze Einflussfunktion ändert sich, wenn sich die Steifigkeit an einer Stelle ändert.

In diesem Dokument kann es nur darum gehen, die grundlegende Technik zu erklären, zu erläutern wie man mit Einflussfunktionen die Sensitivität von Tragwerken kontrollieren kann.

1.4 Änderungen von Steifigkeiten

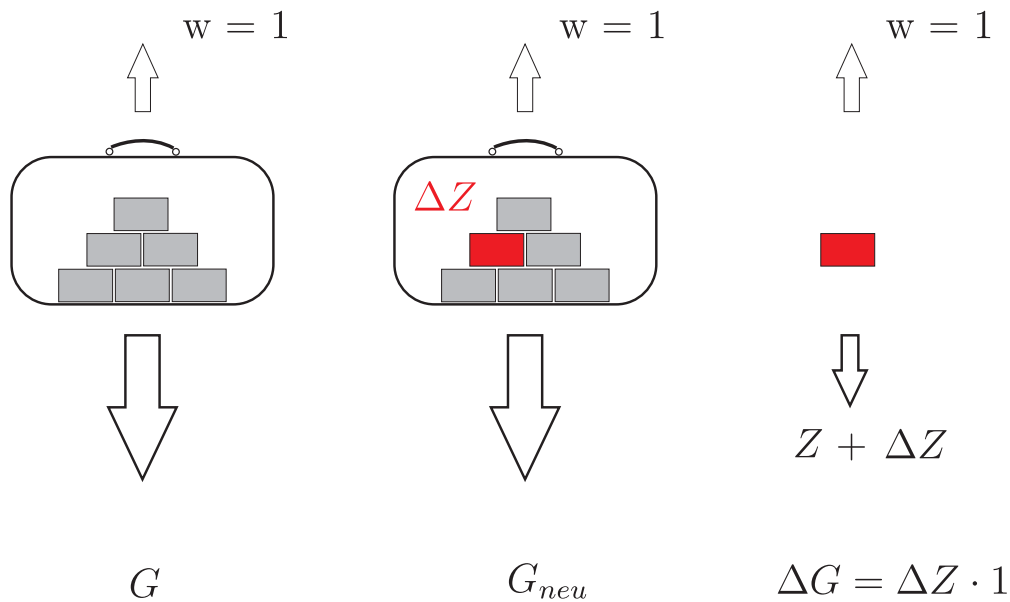
Steifigkeitsänderungen—auch nur in einem kleinen Teil eines Tragwerks—beeinflussen die Schnittkraftverteilung im ganzen Tragwerk, weil die Einflussfunktionen, gleich für welche Größe, sich sofort ändern, wenn der Beton in einem Riegel reißt oder ein Lager nachgibt, s. Bild 6. Sie beginnen sozusagen wegzudriften. Denn Einflussfunktionen sind ja Biegelinien, sie sind ja die Reaktionen des Tragwerks auf das Spreizen von Gelenken, und als solche unterliegen sie, wie natürlich, allen Steifigkeitsänderungen in einem Tragwerk. In Bild 6 ist die Einflussfunktion für die Querkraft in der Mitte des unteren linken Riegels dargestellt. Die gestrichelte Linie ist dieselbe Einflussfunktion, wenn in dem Riegel rechts davon die Steifigkeit um 50 % abfällt. (Rechnerisch dürften die Änderungen wesentlich kleiner sein als hier dargestellt).

Vor dem Steifigkeitsverlust hat die Spreizung des Querkraftgelenkes zu einer horizontalen Verschiebung η des Fußpunktes der Wanderlast geführt. Somit betrug die Querkraft aus der Wanderlast

$$V = P \cdot \eta. \quad (1)$$

Aufgrund des Steifigkeitsverlust hat sich jedoch der Fußpunkt der Wanderlast noch um ein zusätzliches Maß $\Delta\eta$ nach links verschoben und somit beträgt die Querkraft jetzt

$$V + \Delta V = P \cdot (\eta + \Delta\eta). \quad (2)$$



$$\Delta G = G_{neu} - G = \Delta Z$$

Abbildung 7: Wie wir das Gewicht eines Koffers messen.

Die Änderungen in den Einflussfunktionen signalisieren dem Betrachter also, wie sich die Schnittgrößen ändern, wenn sich die Steifigkeiten ändern. Die Konsequenzen aus Steifigkeitsänderungen kann man also ganz einfach sehen, wenn man die beiden Einflussfunktion, vorher und nachher, übereinander legt.

Was vor allem bei einem solchen direkten Vergleich sichtbar wird, ist, welche Teile eines Tragwerkes einen besonders großen Einfluss auf die relevante Größe haben. Steifigkeitsänderungen in diesen Bereichen, führen zu relativ großen Änderungen. So kann man Sensitivitätskarten erstellen.

Es sind zwei Fragestellungen, die hierbei von Interesse sind. Angenommen das größte Moment in einem Tragwerk trete über der Stütze A auf. Um die Tragreserven abzuschätzen, kann man nun fragen: Welche Steifigkeitsänderungen und an welchen Stellen in dem Tragwerk würden dazu führen, dass das Moment größer wird?

Die andere Frage lautet: Angenommen eine Wand oder eine Stütze in einem Tragwerk fällt aus, oder verliert dramatisch an Steifigkeit, welche Änderungen in den Schnittkräften würde das zur Folge haben?

Einmal, so kann man sich das zurecht legen, steht man fest in einem Punkt (über der Stütze A) und schaut nach Störungen aus, die den eigenen Standpunkt gefährden könnten oder, das ist nun die andere Situation, man ist selbst der 'Übeltäter' (die Stütze gibt nach) und man versucht den Punkt zu finden, in dem man den maximalen negativen Effekt erzielt.

Beide Fragen kann man mit der Technik, die wir im Folgenden skizzieren werden, beantworten.

1.5 Kurze Einführung

Um das Gewicht eines Koffers zu ermitteln, heben wir den Koffer kurz an. Die Einflussfunktion für das Koffergewicht G ist also, so können wir, etwas frei formuliert, sagen, eine vertikale Bewegung $w = 1$, s. Bild 7.

Angenommen in dem Koffer sind 10 Ziegelsteine und ein Ziegelstein ändert sein Gewicht um ein Maß ΔZ

$$Z \rightarrow Z + \Delta Z. \quad (3)$$

Wir können nun das geänderte Gewicht G_c ($c = \text{changed}$) des Koffers auf zwei Arten bestimmen. Wir können den ganzen Koffer noch einmal anheben, oder wir heben nur den Ziegelstein an, dessen Gewicht sich geändert hat, denn offenbar gilt

$$G_c - G = \Delta Z. \quad (4)$$

Das Heben des Ziegelsteins allein reicht, um das geänderte Gewicht zu finden. So gehen wir auch sinngemäß in der Statik vor.

Nehmen wir an bei einem Durchlaufträger ändere sich im dritten Feld, im Abschnitt $[x_a, x_b]$ die Steifigkeit, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$. Ein negatives ΔEI entspräche einem Aufreißen des Betons. Welche Auswirkung hat diese Änderung auf die Durchbiegung in der Mitte des ersten Feldes?

Durchbiegungen berechnen wir mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte. Wir bringen in der Mitte des ersten Feldes eine Einzelkraft $\bar{P} = 1$ an und überlagern das zugehörige Biegemoment \bar{M} mit dem Biegemoment M aus der Belastung

$$\delta = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx. \quad (5)$$

Wenn sich die Steifigkeit im dritten Feld ändert, dann ändert sich das Biegemoment $M \rightarrow M_c$ aus der Belastung und auch das Biegemoment $\bar{M} \rightarrow \bar{M}_c$ aus der Einzelkraft $\bar{P} = 1$ und so muss das Integral neu aufgestellt und neu berechnet werden

$$\delta_c = \int_0^l \frac{M_c \bar{M}_c}{EI_c} dx \quad (6)$$

d.h. wir müssen noch einmal über den ganzen Träger integrieren (den Koffer noch einmal anheben). Der untere Index c ($= \text{changed}$) steht hier und im folgenden für die geänderten Werte.

Jetzt kommt die 'Abkürzung'. Man kann zeigen, dass man die *Änderung* der Durchbiegung alleine durch Integration über das betroffene Feld, das Feld, in dem sich die Steifigkeit ändert, berechnen kann und zwar mit der Formel

$$\delta_c - \delta = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c \bar{M}}{EI} dx. \quad (7)$$

Hierbei ist M_c das Moment in dem dritten Feld *nach* der Änderung der Steifigkeit und \bar{M} ist das Moment in dem Feld aus der Einflussfunktion *vor* der Änderung. Das Integrationsintervall $[x_a, x_b]$ ist das dritte Feld des Trägers. In anderen Situationen könnte es aber

auch nur ein Ausschnitt, 10 cm, 20 cm, aus einem Feld sein. Diese Formel entspricht dem Anheben des einzelnen Ziegelsteins.

Wie lässt sich (7) in Worte fassen? Zunächst bemerken wir, dass das Integral ein Energieintegral ist und das stimmt mit der Tatsache überein, dass eigentlich (fast) alle Werte in der Statik Energien sind. Jede Verschiebung, jede Spannung, jede Auflagerkraft ist eine Energie. Wenn man nämlich ein Auflager um eine Längeneinheit absenkt, dann leistet die Lagerkraft dabei eine Arbeit, es entsteht also Energie, und diese Arbeit ist gerade so groß wie die Arbeit, die die Belastung auf den Wegen leistet, die durch die Lagerabsenkung in das Tragwerk hineingetragen werden. So stellt sich die Lagerkraft ein.

Vielleicht kann man die Gleichung (7) daher so umschreiben: Man 'schickt' die Einflussfunktion für die Größe, deren Änderungen man studieren will, als virtuelle Verrückung durch das geschwächte Tragwerksteil und misst die Arbeit, die Energie, die dabei in dem geschwächten Tragwerksteil entsteht. Und diese Arbeit, mit der relativen Steifigkeitsänderung gewichtet, ist gleich der Änderung der betreffenden Größe.

Die Formel (7) ist exakt, aber sie hat den gravierenden Nachteil, dass man den Momentenverlauf M_c , das Moment aus der Last am modifizierten Tragwerk, kennen muss, um die Änderungen der Durchbiegung zu berechnen. Wenn man diesen Momentenverlauf hat, dann kennt man sicherlich auch die modifizierte Biegelinie, und dann braucht man diese Formel nicht mehr...

Aber wir wollen ja Voraussagen machen, ohne neu zu rechnen, ohne das modifizierte System aufzustellen¹.

Um dieses Problem zu umgehen, ersetzen wir in (7) das Moment M_c (Moment aus der Belastung am geschwächten System) durch das Moment M am ursprünglichen ungeschwächten System und wir erhalten so die Näherungsformel

$$\delta_c - \delta \simeq \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M \bar{M}}{EI} dx. \quad (8)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung des ersten Integrals in der Formel

$$\delta_c - \delta = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{(M_c - M) \bar{M}}{EI} dx + \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M \bar{M}}{EI} dx \quad (9)$$

also mit der Annahme, dass in dem geschwächten Bereich der Unterschied der beiden Momente vernachlässigbar ist oder, was auch der Fall sein könnte, die Abweichung $M_c - M$ orthogonal zu \bar{M} ist, die Überlagerung mit den δ_{ik} -Tafeln also Null ergibt.

Denn damit Änderungen einen Effekt haben, müssen sie in die richtige 'Richtung' zeigen. Wenn man einen Berg in der Ebene um 10 km nach rechts oder nach links verschiebt, dann wird der Berg nicht höher. Oder: Verstärkungen an der falschen Stelle in einem Tragwerk bringen nichts.

¹Die Alternative wäre, einfach alles auszuprobieren, die Steifigkeiten feldweise zu variieren, das Tragwerk neu zu berechnen und zu schauen, welche Konsequenzen diese Variationen für das Tragwerk hätten ('Monte-Carlo-Methode')

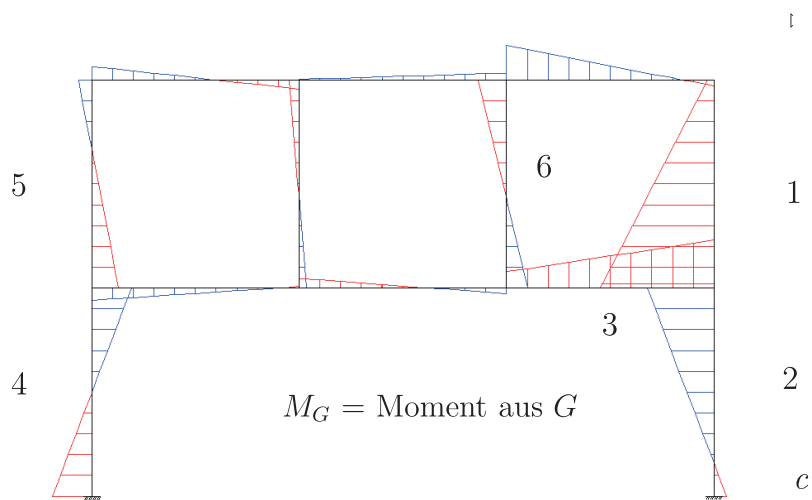
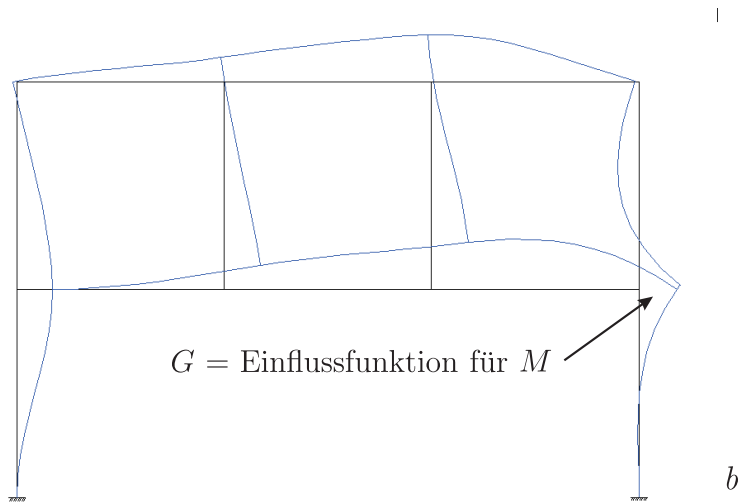
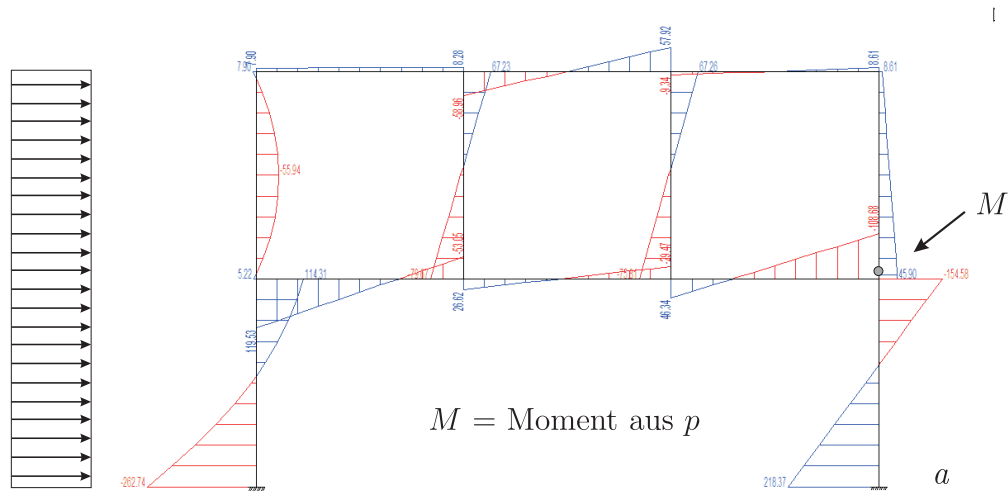


Abbildung 8: Windlast auf einen Rahmen, **a** Momente aus p , **b** Einflussfunktion für das Moment im Fusspunkt des rechten Stiels, **c** Momente aus der Einflussfunktion

1.6 Anwendungsskizze—Frage 1

In Bild 8 ist ein Rahmen unter Windlast dargestellt. Die Aufmerksamkeit gilt hier dem Moment im Fußpunkt des Stiels im ersten Geschoss auf der rechten Seite des Gebäudes. Die Frage lautet: Welche Steifigkeitsänderungen haben den größten Einfluss auf das Moment?

Wenn sich in irgendeinem Teil $[x_a, x_b]$ des Rahmens die Biegesteifigkeit ändert, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$, weil der Beton reißt, $\Delta EI < 0$, dann beträgt die Änderung des Fußpunktmomentes

$$M_c(x) - M(x) = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G M_c}{EI} dx. \quad (10)$$

Links stehen die beiden Momente im Fußpunkt x , nachher und vorher, $M_c(x)$ und $M(x)$. Die Momente M_G und M_c unter dem Integral sind Funktionen. Die Funktion M_G ist das Moment, das zu der Einflussfunktion für das Fußpunktmoment gehört (Einflussfunktion = Biegelinie \rightarrow hat ein Moment) und die Funktion M_c ist das Moment aus der Belastung.

Der Index c an M_c weist darauf hin, dass es der Momentenverlauf nach der Änderung der Steifigkeit ist. Das Bauteil gibt nach, die Steifigkeit ändert sich, und das Tragwerk findet eine neue Gleichgewichtslage. Dabei ändern sich in dem ganzen Tragwerk die Momente, aus M wird M_c .

Nun wollen wir ja nur eine Voraussage machen, d.h. das modifizierte Tragwerk soll ja nicht aufgestellt und berechnet werden, sondern am Originaltragwerk, am ungeschwächten Tragwerk, soll der möglicherweise negative Effekt einer Tragwerksschwächung abgeschätzt werden. Wir kennen also M_c nicht und daher ersetzen wir M_c durch M , was auf die Vernachlässigung des ersten Integrals in der Formel

$$M_c - M = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G (M_c - M)}{EI} dx + \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G M}{EI} dx \quad (11)$$

hinausläuft. Wir hoffen also, dass die Näherung

$$M_c - M \cong \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G M}{EI} dx \quad (12)$$

für baupraktische Belange hinreichend genau ist.

Wie arbeitet man mit dieser Formel? Man einigt sich zunächst auf den möglichen Steifigkeitsabfall ΔEI , also etwa -20% , -30% oder -40% von EI . Damit liegt der Quotient

$$\frac{\Delta EI}{EI} = -0.2 \dots -0.4 \quad (13)$$

vor dem Integral fest. Der Einfachheit halber wird man als die zu untersuchenden Intervalle $[x_a, x_b]$ die Riegel und Stiele selbst wählen, also annehmen, dass die Balken auf voller Länge gerissen sind. Dann gilt es den Balken zu finden, in dem das Integral (12) absolut genommen, den größten Wert hat. Ein Steifigkeitsabfall in diesem Balken bewirkt dann die größte Änderung des Moments im Fußpunkt des Stiels.

Man kann die Kontrolle optisch vornehmen, indem man den Momentenverlauf M und den Momentenverlauf M_G nebeneinander plottet. Die Balken, in denen beide Momente

gleichzeitig groß sind, sind die Balken, bei denen ein Steifigkeitsverlust am kritischsten für das Moment ist.

Das Moment M aus dem maßgebenden Lastfall darf als bekannt vorausgesetzt werden. Um das Moment M_G zu berechnen, wird die Einflussfunktion für das Fußpunktmoment aufgestellt und der zugehörige Momentenverlauf berechnet. Die Einflussfunktion ist ja eine Biegelinie und daher gehört zu ihr natürlich auch ein Momentenverlauf. Das ist M_G .

Ändert sich in einem Stiel oder Riegel die Biegesteifigkeit, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$, so ist die Änderung im Anschnittsmoment gleich

$$M_c - M = \frac{\Delta EI}{EI} \int_0^l \frac{M_G M}{EI} dx. \quad (14)$$

Die Bauteile, in denen *beide* Momente, M_G und M groß sind, und nicht orthogonal zueinander, sind die Bauteile mit dem größten Einfluss auf das Anschnittsmoment. Der Fall, dass die beiden Momente orthogonal zueinander sind, läge zum Beispiel vor wenn längs des Balkens M konstant wäre und M_G antimetrisch. Dann wäre das Integral unabhängig von der Größe von ΔEI Null.

Ein Blick auf die Plots von M und M_G zeigt, dass die Reihenfolge der Wichtigkeit in etwa die folgende sein sollte: Stiel 1 und 2, Riegel 3 und dann die Stiel 4, 5 und 6. Wie natürlich sind es, aufgrund der seitlichem Windbelastung, vor allem die Stiele, deren Steifigkeiten die Höhe des Fußpunktmomentes beeinflussen.

1.7 Anwendungsskizze—Frage 2

Die zweite Frage zielt nach dem Einfluss von Steifigkeitsänderungen in einem Riegel oder einer Stütze auf den Rest des Tragwerkes. Welche Bereiche sind besonders betroffen und wo kann man die Effekte vernachlässigen?

Dabei tritt eine Schwierigkeit auf. Zu jeder Änderung, die wir untersuchen, also zu jeder Schnittgröße, die sich ändert und die einer Beobachtung wert ist, gehört eine eigene Einflussfunktion und somit muss man sehr, sehr viele Einflussfunktionen aufstellen, und sehr viele Integral

$$J_c - J = \frac{\Delta EI}{EI} \int_0^l \frac{M_G M_c}{EI} dx \quad (15)$$

auswerten, wenn man sicher sein will, dass man nichts übersehen hat.

Zwar ändert sich das Moment M aus dem maßgebenden Lastfall nicht, aber das Moment M_G ist für jeden Wert J ein anderes, weil zu jedem J eine andere Einflussfunktion gehört und damit ein anderes Moment M_G (= Moment aus der Einflussfunktion).

Nehmen wir beispielhaft die Querkräfte V in den Zehntelpunkten x_i des ersten Felds eines Durchlaufträgers. Es soll untersucht werden, wie sich diese Werte ändern, wenn der Beton im dritten Feld reißt.

Für jeden einzelnen Querkraftwert $V(x_i)$ in einem der Zehntelpunkte müssen wir die Einflussfunktion aufstellen und das Moment M_G dieser Einflussfunktion mit dem Moment M aus der Belastung überlagern

$$V_c(x_i) - V(x_i) \simeq \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M M_G}{EI} dy. \quad (16)$$

Das ist sehr aufwendig. Zum Glück geht es auch anders.

Bevor wir das wie diskutieren, wie es anders geht, wollen wir diese Gleichung noch etwas ausführlicher schreiben, denn M_G ist eigentlich die Funktion

$$M_G(y) = M(G_V[x])(y). \quad (17)$$

Es ist das Moment im Integrationspunkt y , das zu der Einflussfunktion $G_V[x]$ für die Querkraft im Punkt x gehört. (In der eckigen Klammer $[x]$ steht der Aufpunkt). Ausführlicher ist (16) also identisch mit

$$V_c(x_i) - V(x_i) \simeq \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M \cdot M(G_V[x])(y)}{EI} dy. \quad (18)$$

Nun kommt der Tausch: Man kann in der obigen Formel das Moment M_G durch die Funktion $V(G_M[y])(x)$

$$V_c(x_i) - V(x_i) \simeq \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M \cdot V(G_M[y])(x)}{EI} dy \quad (19)$$

ersetzen. Die Funktion

$$V(G_M[y])(x_i) \quad (20)$$

(Funktion von y) ist die Querkraft im Zehntelpunkt x_i aus der Einflussfunktion $G_M[y]$ für das Biegemoment M im Integrationspunkt y .

Es gibt jetzt also zwei Einflussfunktionen

- $G_V[x_i]$ für die Querkraft in dem Punkt x_i
- $G_M[y]$ für das Moment im Punkt y

Die zweite Einflussfunktionen ist sozusagen die Einflussfunktion für die Energie in dem Träger, denn wir messen die Verzerrungsenergie in einem Balken an Hand der Biegemomente.

Diese zweite Einflussfunktion $G_M[y]$ für das Moment M im Integrationspunkt y entsteht bekanntlich dadurch, dass man im Aufpunkt y einen Knick von Eins erzeugt. Dadurch verformt sich der Durchlaufträger und so entstehen Querkräfte $V(G_M[y])(x)$ in jedem Punkt x des Trägers. Der Ausdruck in (20) ist der Wert dieser Querkraft im Zehntelpunkt x_i

$$\text{was gemessen wird} \quad \rightarrow \quad V(\underbrace{G_M[y]}_{\text{Einflussfunktion}})(x_i) \quad \leftarrow \quad \text{wo} \quad (21)$$

Der Übergang von (16) zu (19) basiert auf der Identität

$$M(G_V[x_i])(y) = V(G_M[y])(x_i), \quad (22)$$

die wiederum auf dem Satz von Betti beruht. Diese Gleichung besagt, dass die gegenseitigen Wirkungen der beiden Einflussfunktionen gleich groß sind. Das Moment im Punkt y , das zu der Einflussfunktion für die Querkraft im Punkte x_i gehört, ist genauso groß wie die Querkraft im Punkt x_i , die zu der Einflussfunktion für das Moment im Punkt y gehört.

Wir können das obige Ergebnis so zusammenfassen: Ändert sich in einem Intervall $[x_a, x_b]$ eines Durchlaufträgers die Biegesteifigkeit, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$, und sei $J(x)$ irgendein beliebiger Wert in einem beliebigen Punkt x des Durchlaufträgers, dann gilt für die Änderung dieses Wertes

$$J_c(x) - J(x) \simeq \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M \cdot J(G_M[y])(x)}{EI} dy. \quad (23)$$

Mit in diesem Integral können wir also alle Änderungen, $J(x) \rightarrow J_c(x)$, in dem Tragwerk erfassen. Hierbei steht, das sei noch einmal betont, J für eine Schnittkraft oder eine Verformung in einem beliebigen Punkt x des Trägers.

Es gibt aber noch ein Problem: Die Einflussfunktion für das Biegemoment, G_M , muss (theoretisch) für das Biegemoment in jedem Integrationspunkt y aufgestellt werden, weil sich ja der Integrand $J(G_M[y])(x)$ mit jedem Punkt y ändert. Die Einflussfunktion für das Moment am Anfang des Intervalls $[x_a, x_b]$ wird im Punkt x einen anderen Wert J haben, als die Einflussfunktion für das Moment am Ende des Intervalls.

Um dieses Problem zu umgehen, kann man das Integral durch eine Ein-Punkt oder Zwei-Punkt Quadratur annähern. Dann muss die Einflussfunktion G_M nur für das Moment in der Mitte bzw. in den beiden Endpunkten des Intervalls aufgestellt werden.

Wie findet man nun die Werte $J(x)$ ($= M, V, N$), die am meisten von einem Steifigkeitsabfall ΔEI betroffen sind? Angenommen man benutzt eine Ein-Punkt Quadratur, dann plottet man den Verlauf von $J(G_M[y])(x)$ über das Tragwerk, also das Moment, die Querkraft und die Normalkraft, die zu der Einflussfunktion für das Moment in der Mitte des Intervalls $[x_a, x_b]$ gehören. Dort, wo die Werte M, V und N aus der Einflussfunktion groß sind, dort sind die Schnittgrößen M, V und N des maßgebenden Lastfalls am meisten von dem Steifigkeitsabfall betroffen.

Diese Technik lässt sich sinngemäß auf alle Bauteile und alle Tragwerke anwenden. Sinngemäß, weil je nach dem Typ des Tragwerks die entscheidende Formel eine leicht andere Gestalt hat. Denn die Formel ist ja ein Energieintegral, misst eine Energie, eine innere Energie, und je nach Typ des Bauteils ist der Ausdruck für diese innere Energie ein anderer.

Hängt die innere Energie des Bauteils von der Normalkraft ab, wie bei einem Fachwerkstab, dann gilt sinngemäß

$$J_c(x) - J(x) \simeq \frac{\Delta EA}{EA} \int_{x_a}^{x_b} \frac{N \cdot J(G_N[y])(x)}{EA} dy. \quad (24)$$

Bei einer Scheibe lautet das entsprechende Integral

$$J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_p} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) \cdot J(G_{\varepsilon_{ij}}[\mathbf{y}])(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (25)$$

Der Teil der Scheibe Ω_p , über den hier integriert wird, ist ein Teilbereich der Scheibe, in dem sich der E-Modul ändert, $E \rightarrow E + \Delta E$. Das J steht für irgendeine interessierende Größe also zum Beispiel eine Verschiebung oder eine Spannung. Die $\sigma_{ij}(\mathbf{y})$ sind die Spannungen aus dem maßgebenden Lastfall im Integrationspunkt \mathbf{y} und die einzelne Funktion

$$G_{\varepsilon_{ij}} \quad (26)$$

ist die Einflussfunktionen für die Verzerrung ε_{ij} im Integrationspunkt $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Weil es vier Verzerrungen gibt, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ und ε_{22} , von denen zwei gleich sind, sind jetzt in jedem Integrationspunkt drei Einflussfunktionen aufzustellen. In der Regel wird man für jedes einzelne finite Element eine Ein-Punkt Quadratur wählen, so dass man für die drei Verzerrungen in der Mitte der betroffenen Elemente jeweils drei Einflussfunktionen aufstellen muss.

Sinngemäß dieselben Überlegungen gelten für eine Platte. Wenn bei einer Platte in einem Teilgebiet Ω_p der Beton reißt, dann ist davon die Plattensteifigkeit

$$K = \frac{E h^3}{12} \cdot \frac{1}{(1 - \nu^2)} \quad (27)$$

betroffen und das Maß für die Änderung einer Größe J (Durchbiegung, Moment, Querkraft, et cetera) ist das Energieintegral

$$J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta K}{K} \int_{\Omega_p} \kappa_{ij}(\mathbf{y}) \cdot J(G_{m_{ij}}[\mathbf{y}])(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (28)$$

wobei jetzt

$$G_{m_{ij}}[\mathbf{y}] \quad (29)$$

die Einflussfunktion für das Moment m_{ij} im Integrationspunkt \mathbf{y} ist.

In beiden Gleichungen, (25) und (28), haben wir von der Einsteinschen Summationskonvention Gebrauch gemacht, d.h. über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren.

1.8 Rechentechnische Umsetzung

Anders als bei Stabtragwerken verlangt die rechentechnische Umsetzung dieser Formeln nun doch einige Überlegungen. Beginnen wir zunächst mit dem Verständnis dieser Formeln und nehmen an, dass in einem einzigen Element von der Größe Ω_e der Beton reißt. Dann kann man das Integral sicherlich durch eine Ein-Punkt Quadraturformel ersetzen und erhält so den Ausdruck

$$J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta K}{K} \cdot (\kappa_{ij}(\mathbf{y}_c) \cdot J(G_{m_{ij}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x})) \cdot \Omega_e. \quad (30)$$

Die κ_{ij} sind die Krümmungen in Elementmitte aus dem maßgebenden Lastfall und die vier Zahlen $J(G_{m_{ij}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x})$ sind die Werte J der vier Einflussfunktionen für die Momente in Elementmitte und zwar die Werte J in dem Punkt \mathbf{x} , der auf der linken Seite der Gleichung steht.

Bei der Auswertung werden die 2×4 Werte κ_{ij} und $J(G_{m_{ij}})$ paarweise multipliziert und addiert und ergeben so gesamthaft die Änderung der Größe J in dem Punkt \mathbf{x}

$$\begin{aligned} J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) &\simeq \frac{\Delta K}{K} \cdot (\kappa_{ij}(\mathbf{y}_c) \cdot J(G_{m_{ij}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x})) \cdot \Omega_e \\ &= \frac{\Delta K}{K} \cdot (\kappa_{11}(\mathbf{y}_c) \cdot J(G_{m_{11}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x}) + 2 \cdot \kappa_{12}(\mathbf{y}_c) \cdot J(G_{m_{12}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x}) \\ &\quad + \kappa_{22}(\mathbf{y}_c) \cdot J(G_{m_{22}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x})) \Omega_e. \end{aligned} \quad (31)$$

In der linearen Statik darf man superponieren, d.h. wir bilden erst die Summe

$$\Sigma = \kappa_{11}(\mathbf{y}_c) \cdot G_{m_{11}}[\mathbf{y}_c] + 2 \cdot \kappa_{12}(\mathbf{y}_c) \cdot G_{m_{12}}[\mathbf{y}_c] + \kappa_{22}(\mathbf{y}_c) \cdot G_{m_{22}}[\mathbf{y}_c] \quad (32)$$

und wenden dann auf die Summe die Funktion J an

$$J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta K}{K} \cdot J(\Sigma) \cdot \Omega_e. \quad (33)$$

Ist also zum Beispiel J das Moment m_{xx} , dann sind in all den Punkten \mathbf{x} der Platte die Änderungen dieses Momentes groß, in denen (33) groß ist.

Nun kann man diese Summe noch vereinfachen, indem man einfach die κ_{ij} alle eins setzt. Dann wird aus (30) die Summe

$$J_c(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta K}{K} \cdot J(G_{m_{11}}[\mathbf{y}_c] + 2 \cdot G_{m_{12}}[\mathbf{y}_c] + G_{m_{22}}[\mathbf{y}_c])(\mathbf{x}) \cdot \Omega_e \quad (34)$$

Dieses so reduzierte Integral liefert dann natürlich keinen echten Wert mehr, aber es bleibt als Indikatorfunktion wertvoll. Denn die Schnittgrößen $J(\mathbf{x})$ für die dieser Indikator groß ist, sind am meisten von den Steifigkeitsänderungen in dem Element Ω_e betroffen.

Bleiben wir noch bei diesem vereinfachten Indikator. Wie wird er berechnet? Wir lösen das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_G = \mathbf{f}. \quad (35)$$

Die Komponente f_i des Vektors ist für jedes i , für jeden Freiheitsgrad i , die Summe

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{j,k=1}^2 m_{jk}(\varphi_i)(\mathbf{y}_c) \\ &= m_{11}(\varphi_i)(\mathbf{y}_c) + 2 \cdot m_{12}(\varphi_i)(\mathbf{y}_c) + m_{22}(\varphi_i)(\mathbf{y}_c) \end{aligned} \quad (36)$$

also die Summe der vier Momente m_{jk} der Ansatzfunktion φ_i , die zu dem Freiheitsgrad i gehört, in der Elementmitte \mathbf{y}_c . Weil die meisten Ansatzfunktionen im Bereich des Elementes Ω_e Null sind, ist dieser Vektor \mathbf{f} schwach besetzt. Wenn wir einmal ein kanonisches Viereckelement mit drei Freiheitsgraden pro Ecke voraussetzen, dann sind nur zwölf Komponenten des Vektors besetzt und alle anderen sind null.

Diese kumulierten Momente werden als Knotenkräfte auf die Platte aufgebracht und dabei entstehen die Knotenverschiebungen \mathbf{u}_G . Und wie zu jedem Lastfall, so gehören auch zu diesen Knotenverschiebungen Momente, Querkräfte usw. und diese Werte, das sind die $J(\mathbf{x})$.

Will man also zum Beispiel wissen, in welchem Bereich der Platte mit großen Änderungen in der Querkraft q_x zu rechnen ist, wenn der Beton in dem Element Ω_e reißt, dann muss man sich den Verlauf von q_x , den der Vektor \mathbf{f} erzeugt, anschauen. Und die Punkte, in denen die Querkraft in der anderen Richtung, also q_y , am stärksten von der Änderung betroffen ist, findet man, indem man den Verlauf von q_y studiert. Und so für jeden anderen Wert auch.

Das Gleichungssystem (35) wird also nur einmal gelöst. Hier kommt der große Vorteil zu tragen, den der Tausch (22) mit sich bringt. Man muss nicht für jeden Wert J und für jeden Punkt \mathbf{x} eine separate Einflussfunktion generieren, sondern eine Einflussfunktion für die kumulierten Momente in der Elementmitte reicht.

Der Vektor \mathbf{f} stellt sozusagen den Lastfall Energie in dem Element Ω_e dar (unter der Annahme dass die konjugierten Werte alle den Wert eins im Element haben), und wie diese Energien nun ausstrahlt, das charakterisiert den Beitrag, den das Element zu dem Tragwerk leistet. Wenn die Werte J aus dem Lastfall \mathbf{f} alle klein sind, dann kann man davon ausgehen, dass ein Steifigkeitsverlust in dem Element vernachlässigbar ist.

Die Erweiterung auf mehrere Elemente ist klar. Dann wächst die Zahl der Einträge in dem Vektor \mathbf{f} , weil nun noch zusätzlich weitere Knoten mit den fiktiven Knotenkräften f_i belastet werden. Je mehr Elemente natürlich dazukommen, desto verschwommener wird natürlich die Indikatorfunktion. Aber es hindert einen ja nichts daran, die Elementbeiträge mit den Krümmungen aus dem maßgebenden Lastfall zu wichten und so die Formel wieder näher an die tatsächlichen Verhältnisse heranzurücken.

Die Technik lässt sich also sinngemäß bei allen Tragwerken einsetzen, und es ist evidenten maßen gleichgültig, ob man damit Änderungen in Schnittkräften, in Spannungen, Verformungen oder Lagerkräften verfolgt.

Kommen wir noch einmal auf den Lastfall Energie und die zugehörigen Knotenkräfte f_i zu sprechen. Mit Energie ist die innere Energie des Bauteils gemeint. Die Energie ist das Produkt konjugierter Größen, also Spannungen mal Dehnungen, Momente mal Krümmungen, etc. Einer der Terme kommt aus dem maßgebenden Lastfall und der andere Term kommt aus der Einflussfunktion. Wegen der Symmetrie der inneren Energie ist es gleichgültig, ob die Spannungen oder die Dehnungen aus dem maßgebenden Lastfall kommen. Auf jeden Fall muss man, wenn man mit diesen Formeln arbeitet, wissen, wie die innere Energie des Bauteils definiert ist, das man untersucht.

Nehmen wir zum Beispiel einen räumlichen Stab. Die virtuelle innere Energie, die durch das Spreizen eines Querkraftgelenkes (= Einflussfunktion für eine Querkraft) in diesem Stab ausgelöst wird, ist der Ausdruck

$$a(u, u_G) = \int_0^l \left(\frac{N N_G}{EA} + \frac{M_x M_x^G}{G I_T} + \frac{M_y M_y^G}{EI_y} + \frac{M_z M_z^G}{EI_z} \right) dx \quad (37)$$

wobei der Index G auf die Schnittgrößen aus der Einflussfunktion hinweist. Im Sinne einer Indikatorfunktion setzen wir die Schnittkräfte aus dem maßgebenden Lastfall gleich Eins und berechnen das verbleibende Integral

$$\int_0^l \left(\frac{N_G}{EA} + \frac{M_x^G}{G I_T} + \frac{M_y^G}{EI_y} + \frac{M_z^G}{EI_z} \right) dx \quad (38)$$

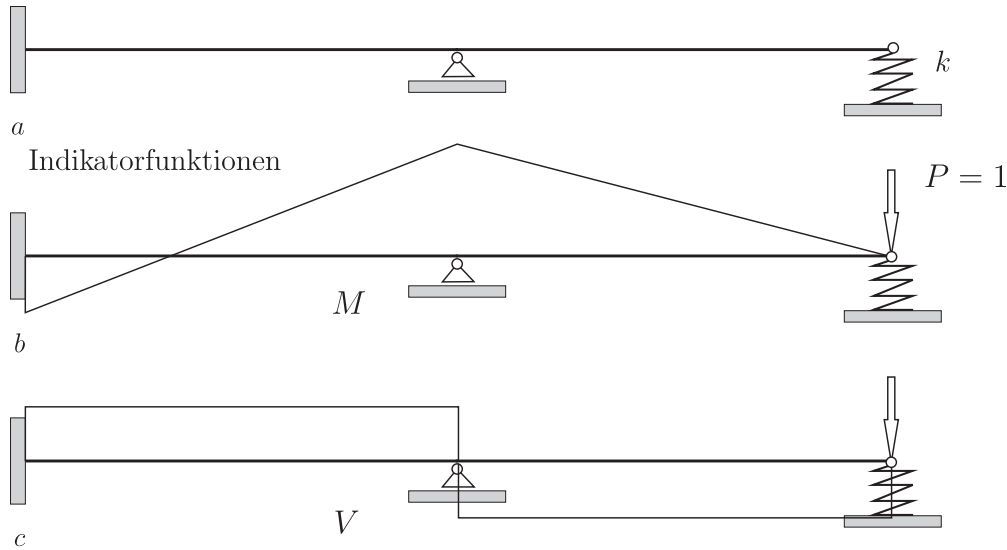


Abbildung 9: Federndes Lager **a)** System **b)** Momente aus der Einflussfunktion für die Federzusammendrückung **c)** Querkräfte aus der Einflussfunktion

durch eine Ein-Punkt Quadratur, $x_c = \text{Mitte des Elements}$,

$$\left(\frac{N_G(x_c)}{EA} + \frac{M_x^G(x_c)}{G I_T} + \frac{M_y^G(x_c)}{EI_y} + \frac{M_z^G(x_c)}{EI_z} \right) \cdot l. \quad (39)$$

Der Vektor \mathbf{f} , der zu dem Energielastfall gehört, hat dann die Komponenten

$$f_i = \left(\frac{N_G(\varphi_i)(x_c)}{EA} + \frac{M_x^G(\varphi_i)(x_c)}{G I_T} + \frac{M_y^G(\varphi_i)(x_c)}{EI_y} + \frac{M_z^G(\varphi_i)(x_c)}{EI_z} \right) \cdot l, \quad (40)$$

wenn die φ_i die Einheitsverformungen sind, die zu den Freiheitsgraden u_i des Tragwerks gehören. Bis auf die beiden Knoten, die zu dem Träger gehören, sind daher alle anderen Knoten unbelastet, weil eine Aktivierung eines abliegenden Freiheitsgrades keine Schnittkräfte in dem Träger erzeugen. Alle anderen Freiheitsgrade bleiben bei einer Einheitsverformung ja gesperrt.

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_G = \mathbf{f} \quad (41)$$

repräsentiert dann die Indikatorfunktion. Die Indikatorfunktion ist also die zu dem Vektor \mathbf{f} gehörige Verformungsfigur des Tragwerks. Die Größe der Werte J ($= M, N, V$ etc.) aus dem Lastfall \mathbf{f} signalisiert, welche Werte J in dem maßgebenden Lastfall von einem Steifigkeitsabfall in dem Träger besonders betroffen sind.

1.9 Nachgiebige Lager

Dieser Formalismus lässt sich natürlich auch auf nachgiebige Lager anwenden. Auf Lager, die plötzlich nachgeben, deren Steifigkeiten sich ändern, oder die ganz ausfallen. Wir haben alle diese verschiedenen Fälle in X sehr detailliert behandelt und wir wollen wir an dieser Stelle nur anhand eines einfachen Balkens die grundlegende Idee darstellen.

Der Zweifeldträger in Bild X ruht rechts auf einem elastischen Lager. Die Frage ist, wie ändern sich die Werte J , also die Schnittkräfte oder die Lagerkräfte, wenn sich die Steifigkeit k des elastischen Lagers ändert? Die virtuelle innere Energie des Trägers ist der Ausdruck

$$a(w, \delta w) = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI} dx + k w(l) \cdot \delta w(l) \quad (42)$$

und somit beträgt die Änderung in einer Größe J auf Grund einer Änderung $k \rightarrow k + \Delta k$

$$J_c(x) - J(x) = -\Delta k \cdot G(l, x) \cdot w(l) \quad (43)$$

Hierbei ist $G(l, x)$ die Zusammendrückung der Feder aus der Einflussfunktion für die Größe $J(x)$ und $w(l)$ ist die Zusammendrückung der Feder in dem maßgebenden Lastfall. Wenn man also zum Beispiel an einer Stelle x des Trägers ein Querkraftgelenk einbaut und dieses um Eins spreizt, dann wird das zu einer Bewegung in der Feder führen und das ist $G(l, x)$, wobei l für das Ende des Trägers steht, also wo sich die Feder befindet.

Nun kommt noch der Tausch. Es sei $\eta(x)$ die Einflussfunktion für die Zusammendrückung der Feder, d.h. um wieviel drückt sich die Feder zusammen, wenn die Wanderlast $P = 1$ an der Stelle x steht. Diese Einflussfunktionen wird ja einfach dadurch erzeugt, dass man die Feder mit einer Kraft der Größe Eins belastet. Nun gilt

$$G(l, x) = J(\eta)(x). \quad (44)$$

Und damit lässt sich (43) auch wie folgt schreiben

$$J_c(x) - J(x) = -\Delta k \cdot J(\eta)(x) \cdot w(l). \quad (45)$$

Will man also wissen will, welche Werte J in dem Durchlaufträger besonders von einer Änderung der Federsteifigkeit betroffen sind, dann muss man sich die Werte J anschauen, die die Einflussfunktion für die Zusammendrückung der Feder erzeugt. Man plottet also die Biegemomente und die Querkräfte, die zu der Einflussfunktion η gehören und die Punkte, in denen diese Werte groß sind, sind am meisten von einer Änderung der Lagersteifigkeit betroffen.

Die rechte Seite von (45) ohne $w(l)$ ist also die Indikatorfunktion für das nachgiebige Lager

$$\text{Indikatorfunktion} = -\Delta k \cdot J(\eta)(x) \quad (46)$$

und im konkreten Einzelfall müsste man eben diese Funktion noch mit der Zusammendrückung der Feder in dem maßgebenden Lastfall multiplizieren. Dann hätte man die echten Werte.

Man könnte die Indikatorfunktion auch nur auf

$$\text{Indikatorfunktion} = -J(\eta)(x) \quad (47)$$

reduzieren, also die Steifigkeitsänderung auch noch herausnehmen und diese dann dem $w(l)$ zuschlagen.

1.10 Kollaps von Tragwerken—kritischer Pfad

Der Kollaps von Tragwerken beginnt damit, dass ein wichtiges Bauteil ausfällt, dieser Ausfall zu Überbeanspruchung an anderen Stellen führt, diese dann plastifizieren und weitere Bauteile einstürzen, bis das ganze Tragwerk zusammenfällt.

Die Kette dieser Ereignisse bezeichnen wir als den kritischen Pfad. Natürlich gibt es in einem Tragwerk mehrere kritische Pfade, je nachdem welches Bauteil zuerst versagt. Wenn man sich zu Beginn auf die höchst beanspruchten Stellen in den Tragwerk konzentriert, sollte es möglich sein mittels der hier vorgestellten Sensitivitätsanalyse den zu einem Anfangsfehler gehörigen kritischen Pfad anzugeben.

Man findet zunächst die Stelle in den Tragwerk, die am meisten von dem Steifigkeitsabfall betroffen ist und an der sich ein plastisches Gelenk aufgrund der Überbeanspruchung ausbildet. Im nächsten Schritt werden nun die sich daraus ergebenden Schnittkraftumlagerungen berechnet, die maximal beanspruchte Stelle bestimmt, ein Fließgelenke eingeführt und werden dieses Schrittes uraufgeführt, solange sich ein Gleichgewichtszustand einstellen kann bzw. bis das System instabil wird.

In der Übersicht stellt sich eine solche Kollapsberechnung, wie folgt dar, [11],

1. Findung von kritischen Elementen anhand von Energiebetrachtung, Ausnutzungsgrad und versteckten Kinematiken
2. Gegebenenfalls eine Vervollständigung oder Änderung von kritischen Elementen
3. Auswahl eines Fehlers, dessen Auswirkungen zu untersuchen sind
4. Bildung der Einflussfunktion für die betrachtete Systemänderung
5. Bestimmung der Schnittgrößenänderungen mit der Methode der Sensitivitätsanalyse mit den Einflussfunktionen
6. Überprüfung, ob die berechneten Änderungen maßgeblich für das Tragwerk sind
7. Modellierung des neuen Systems mit dem Fehler
8. Kontrolle, ob das System verschieblich ist
9. Erneute Untersuchung, wie in den Punkten 4. bis 8.

Das Abbruchkriterium ist die Verschieblichkeit des Tragwerks.

Der Rahmen in Bild 10 wurde so überprüft. Die Riegel und die Stiele haben eine Länge von 8 m und bestehen aus Stahlprofilen HEB200 (Stahl S235). Rechts greift eine seitliche Streckenlast von 10 kN/m an.

Aus der Streckenlast ergibt sich der Momentenverlauf in Bild 11. Das größte Biegemoment tritt in dem belasteten Stiel auf und es wird angenommen, dass in diesem Balken die Steifigkeit nachgibt. Es wird angenommen, dass dieser Balken geschwächt wird. Nun bildet man die Einflussfunktion für das Biegemoment M_y an dieser Stelle. Daraus resultiert ein Momentenverlauf, der dem Bild 12 entnommen werden kann. Aus den Verläufen wird ersichtlich, dass sowohl aus der Belastung als auch aus der Einflussfunktion das Biegemoment in Knoten

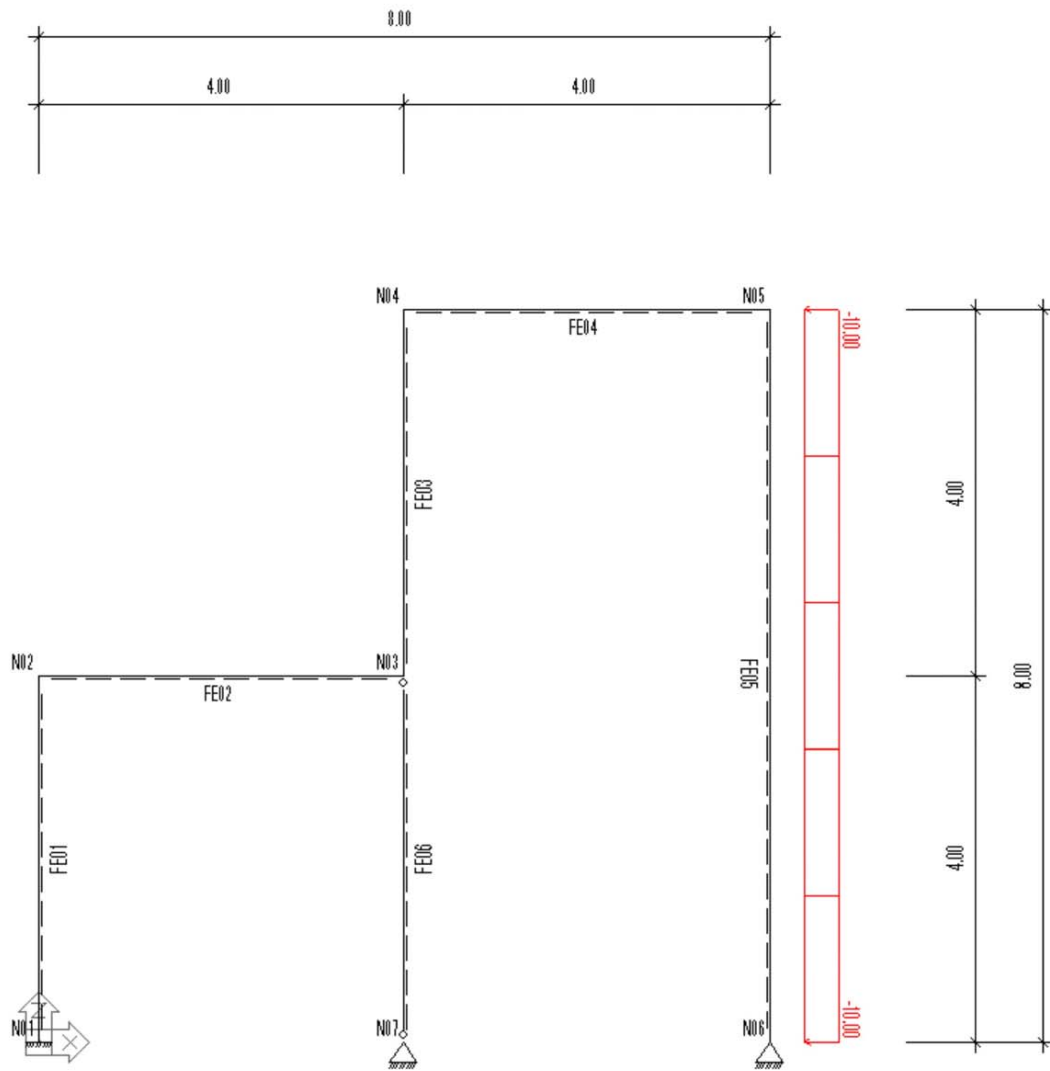


Abbildung 10: Rahmen

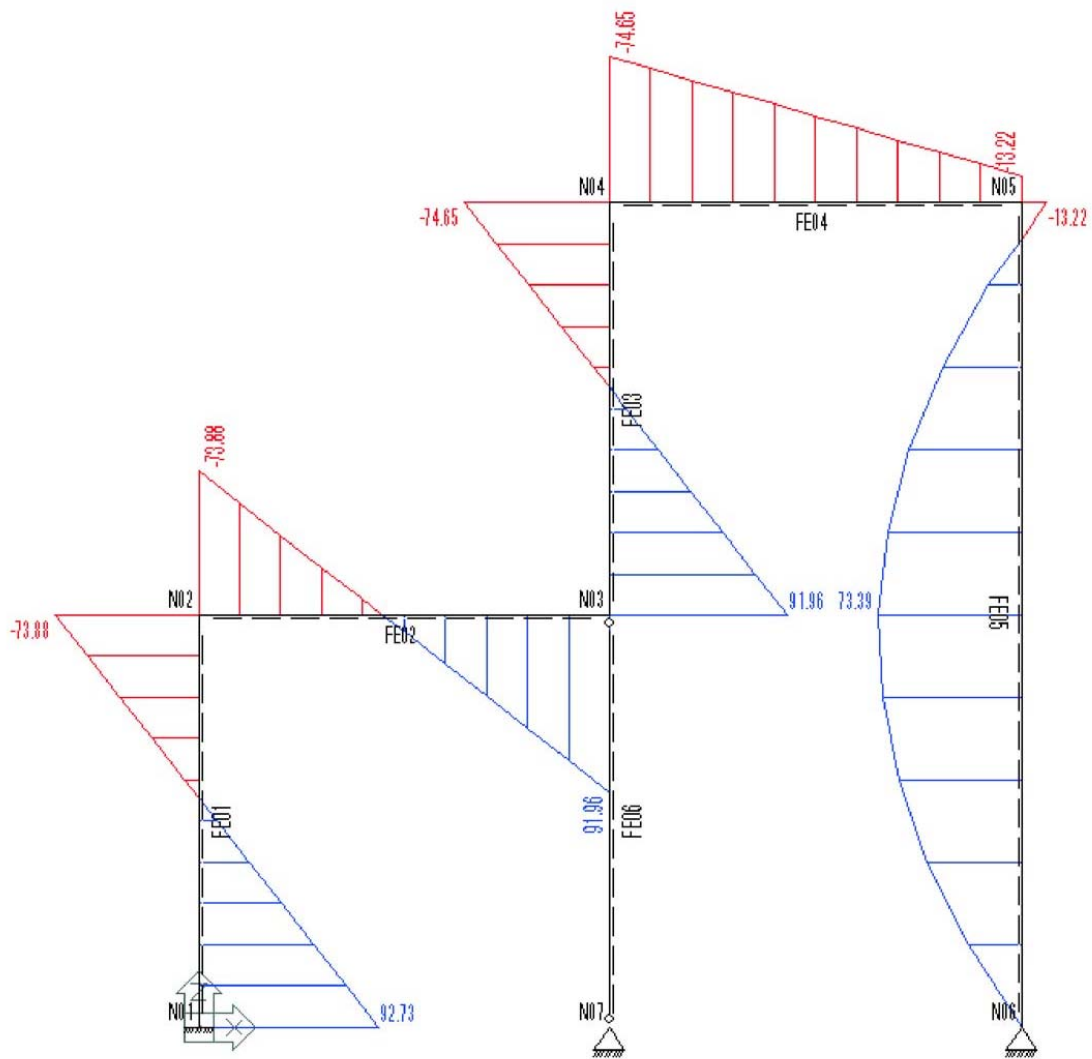


Abbildung 11: Biegemomente M_y aus der Linienlast

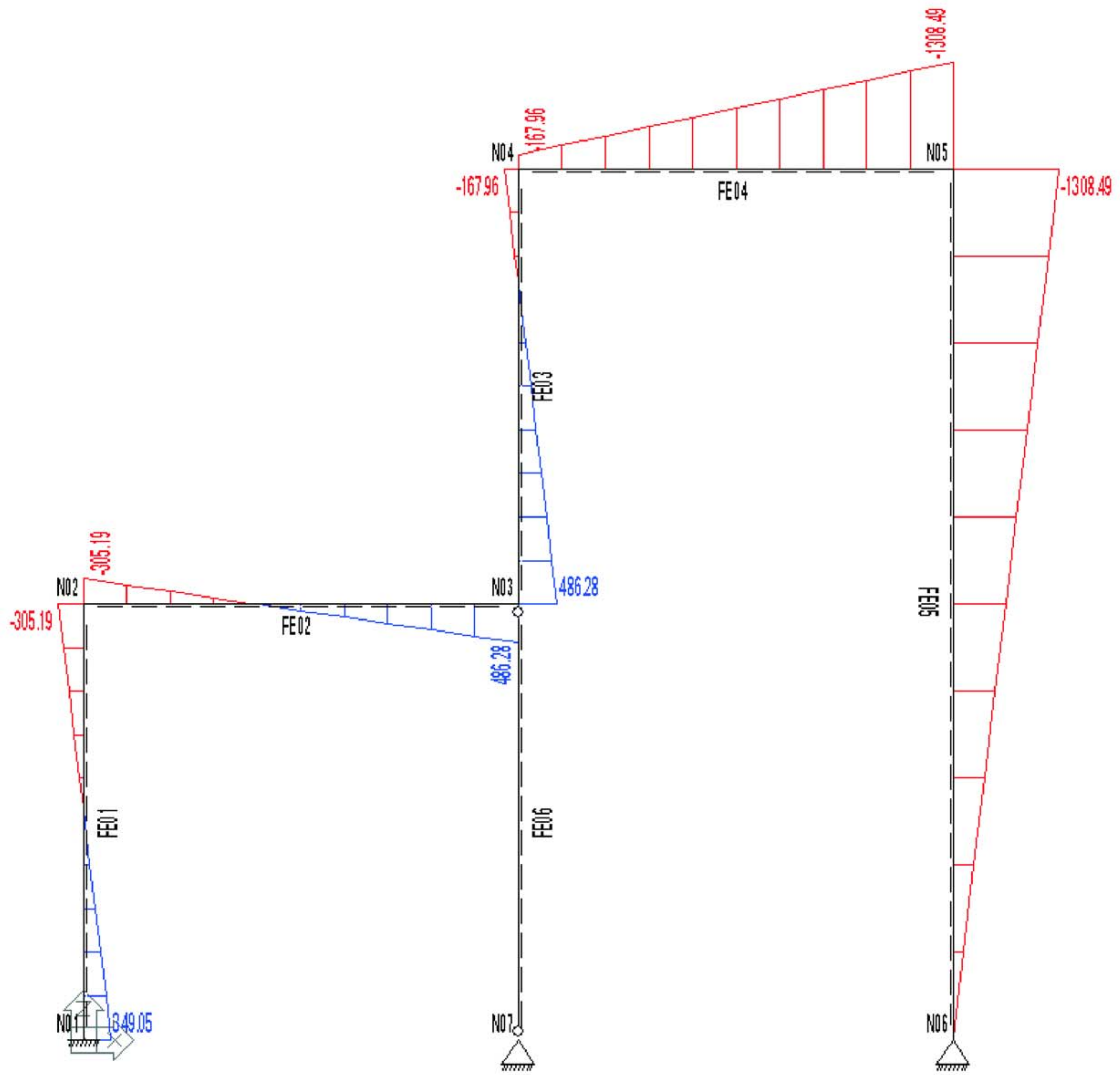


Abbildung 12: Biegemomente M_y aus der Einflussfunktion

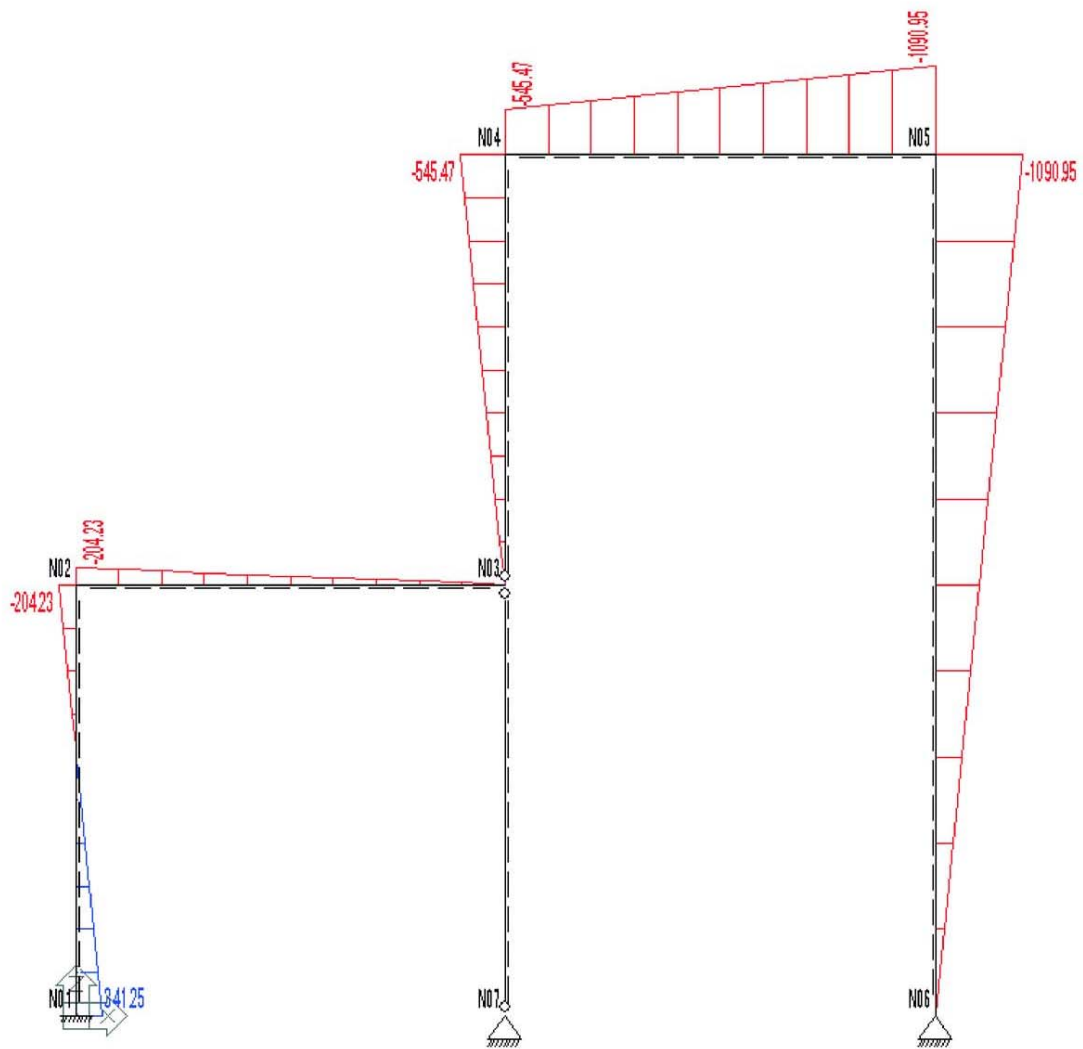


Abbildung 13: Biegemomente M_y am geschwächten System aus der Belastung

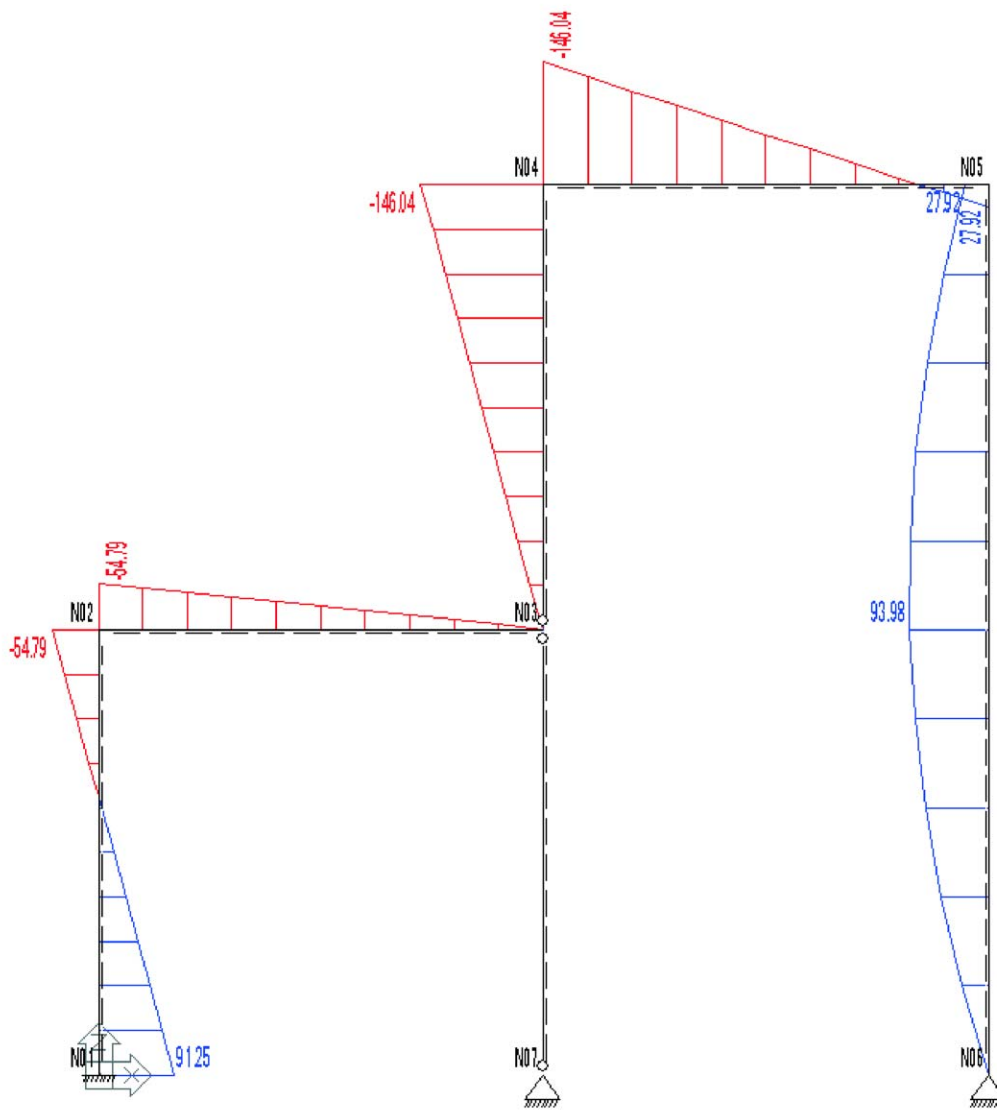


Abbildung 14: Biegemomente M_y am geschwächten System aus der Einflussfunktion

N03 den maximalen Betrag aufweist. Daher wird angenommen, dass sich an dieser Stelle ein Gelenk bildet.

Das neue, veränderte System wird modelliert und berechnet. Der Momentenverlauf aus der Linienlast hat nun einen anderen Verlauf (siehe Bild 13). Nun wird wieder eine Einflussfunktion gebildet, aus der gewisse Schnittgrößen resultieren. Diese sind im Bild 14 dargestellt. Aus den beiden Darstellungen wird ersichtlich, dass die nächste Änderung im System im Knoten N04 stattfinden wird, da dort die Biegemomente sowohl aus der Einflussfunktion, als auch aus der Belastung groß sind. Daraus folgt, dass an dieser Stelle die nächste Schwächung zu modellieren ist.

Von der weiteren Analyse wird jedoch abgesehen, da ein weiteres Momentengelenk im Knoten N04 das System statisch bestimmt macht. Das bedeutet, dass aus der Einflussfunktion keine Kräfte resultieren und somit ist die weitere Auswertung nicht möglich. Jeder weitere Fehler würde zum Kollaps des Systems führen.

Literatur

- [1] Grätsch T, Hartmann F, Katz C, “Einflussfunktionen und finite Elemente”, Bauingenieur, 78, (2003)
- [2] Grätsch T, Hartmann F (2004) “Duality and finite elements”, Finite Elements in Analysis and Design, 40: 1005–1020
- [3] Hartmann F, Katz C (2002) Statik mit finiten Elementen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [4] Hartmann F, Katz C (2007) Structural Analysis with Finite Elements, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage
- [5] Morris A, (2008) A Practical Guide to Reliable Finite Element Modelling, John Wiley & Sons Inc. Oxford
- [6] Otaibi W (2010) FMEA (Failure Mode and Effects Analysis) eines Tragwerks, Masterarbeit Universität Kassel
- [7] Otaibi W (2009) Sensitivitätsanalyse an ebenen und räumlichen Rahmen, Diplomarbeit Universität Kassel
- [8] Otaibi W, Takunov B (2010) Überführung eines 3D- in ein 2D-Modell, Projektarbeit Universität Kassel
- [9] Rombach G (2006) Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau, Ernst & Sohn Berlin, 2. Auflage
- [10] Sopoht M, Sopoht G (2008) Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise, Diplomarbeit Universität Kassel
- [11] Takunov B (2010) Sensitivitätsanalyse mittels Einflussfunktionen, Masterarbeit Universität Kassel