

Diplomarbeit I

Sensitivitätsanalyse

an ebenen und räumlichen Rahmen

von

Walid Kh. A. Al Otaibi

wk_1985@hotmail.com

Bearbeitungszeit: 10. Februar 2009 bis 07. April 2009

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann

2. Prüfer:

Prof. Dr.-Ing. W. Seim

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Walid Kh. A. Al Otaibi, dass die Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe, nur unter Benutzung der angegebenen quellen und Hilfsmittel angefertigt worden ist.

Kassel, 07.04.2009

Ort, Datum

Walid Kh. A. Al Otaibi

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Gliederung	2
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Der Satz von Betti	3
2.2	Die Einflussfunktionen	6
2.2.1	Die Dirac'sche-Delta-Funktion	7
2.2.2	Die Statik und die Einflussfunktionen	8
2.3	Die Finite-Elemente-Methode	9
2.3.1	FEM: Genährte Einflussfunktionen	11
3	Die Sensitivitätsanalyse	15
3.1	Die Änderung der Biegesteifigkeit in einem System	15
3.2	Anwendungen	23
4	Ausgewählte Beispiele	27
4.1	Beispiel - Stockwerksrahmen	27
4.2	Beispiel - Vierendeelträger	32
4.3	Beispiel - Mehrfeldbrücke	37
4.4	Beispiel - Einfacher 3D-Rahmen	40
4.5	Beispiel - Zweiter 3D-Rahmen	44
4.6	Auswertung der Ergebnisse	47
5	Zusammenfassung	49
	Abbildungsverzeichnis	52

INHALTSVERZEICHNIS

III

Tabellenverzeichnis	55
Literaturverzeichnis	56
Anhang	57
A Statische Systeme	57
B Stockwerksrahmen	58
C Vierendeelträger	59
D Mehrfeldbrücke	60
E Zweiter 3D-Rahmen	61

1 Einleitung

Das Forschungsvorhaben ‚präventive Qualitätssicherung in der computerbasierten Tragwerksplanung durch Fehlermöglichkeits- und Einflussanalyse‘ des Fachgebiets Baustatik der Universität Kassel hat das Ziel, praxisgerechter Softwarewerkzeuge zur systematischen Qualitätssicherung eines Bauwerks zu erproben und entwickeln, um Schäden durch fehlerhafte Planung zu vermeiden. Deswegen wird im Rahmen dieses Forschungsvorhaben ein Algorithmus erprobt, mit dem die Sensitivität eines Tragwerks gegenüber Änderungen in den Steifigkeiten des Tragwerks erfasst werden kann.

Die computerorientierten Rechenverfahren werden zurzeit häufiger eingesetzt, um Lager- und Schnittkräfte zu berechnen. Mit Hilfe des gestrebten Algorithmus hofft das Fachgebiet ‚Baustatik‘, die Erweiterung dieser Berechnungsverfahren, um eine ‚qualitative‘ rechnergestützte Statik zu entwickeln.

In dieser Arbeit werden die Grundlagen der Berechnungsverfahren der Steifigkeitsänderung dargestellt. Berücksichtigt werden die Steifigkeitsänderungen in ebenen und räumlichen Tragwerken. Weiterhin werden die Biege und Lagersteifigkeitsänderungen betrachtet. Diese Änderungen können aufgrund von Bauschäden entstehen, z.B. Betonrissen, oder wegen fehlerhafter Ausführung der Planung.

Der Einfluss der Steifigkeitsänderungen auf die Schnittgrößen an hoch beanspruchten Stellen soll mittels der zugehörigen Einflussfunktionen abgeschätzt werden. Hier werden die abgeschätzten Werte mit den exakten Werten der

Änderungen verglichen. Die Methode, die in [4] dargestellt ist, wird zur Berechnung der abgeschätzten Änderungen angewendet, und anschließend mit den exakten Werten verglichen.

1.1 Gliederung

Kapitel 2 beinhaltet die theoretischen Grundlagen, die für die Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen von Bedeutung sind. Am Anfang wird der Satz von Betti geklärt, erhält mit dessen Hilfe man den Zugang zu den Einflussfunktionen. Danach werden die ‚dirac’sche-Delta-Funtionen‘ erleutert und das Erzeugen von Einflussfunktionen durch Aufbringen von Singularitäten dargestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Herleitung der Einflussfunktionen, die zur Durchführung einer Sensitivitätsanalyse für ausgewählte Schnittgrößen und Systemkonfigurationen nötig sind.

Kapitel 4 ist eine Dokumentation von ausgewählten Beispielen, in diesem Kapitel werden die erzielten Ergebnisse beurteilt. Die ausgewählten Beispiele sind ebene und räumliche Rahmen, es wird die Änderungen einer Lagersteifigkeit und die Änderungen der Biegesteifigkeit eines Bauteils untersucht, sowie deren Auswirkung auf die Lager- und Schnittkräfte.

Kapitel 5 beinhaltet eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse der Arbeit.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel beschäftige ich mich mit der Bereitsstellung der für die Sensitivitätsanalyse bedeutenden Grundlagen. Als erstes beschäftige ich mich mit dem ‚Satz von Betti‘, seiner Herleitung und seinem Zusammenhang mit den ‚Green’schen Identitäten‘. Danach beschreibe ich, wie man die ‚Dirac’sche-Delta-Funktionen‘ anwendet, um Einflussfunktionen durch das Aufbringen einer Singularität zu erzeugen.

Anschließend erkläre ich die Anwendung der Finiten Elementen Methode, um eine genäherte Einflussfunktion zu erzeugen. Die FE-Methode wird hier beschrieben, weil das Fachgebiet ‚Baustatik‘ hofft, diese Sensitivitätsanalyse später in eine FE-Software zu integrieren, die eine wichtige Rolle für die Statiker und Tragwerksplaner spielt.

2.1 Der Satz von Betti

Der ‚Satz von Betti‘ ist in der Statik sehr wichtig. Mit Hilfe des Satzes von Betti können alle Weg- bzw. Kraftgrößen eines Tragwerks bestimmt werden. Mit dem ‚Satz von Betti‘ erhalten wir auch einen allgemeinen Zugang zu den Einflussfunktionen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der ‚Satz von Betti‘ für einen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI hergeleitet.¹

¹Es wird hier beispielsweise der Satz von Betti für einen Balken mit konstanter EI hergeleitet

Die Differentialgleichung für die Durchbiegung lautet,

$$EIw^{IV}(x) = p(x) \quad \forall x \in [0, l]. \quad (2.1)$$

Setzt man eine virtuelle Verrückung $\hat{w}(x)$ auf den Balken ein, dann erhält man für die virtuelle äußere Arbeit der Belastung $p(x)$ auf den virtuellen Wegen $\hat{w}(x)$ das Integral

$$\int_0^l EIw^{IV}(x)\hat{w}(x) dx, \quad (2.2)$$

nach zweimaliger partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^l EIw^{IV}(x)\hat{w}(x) dx &= \left[-EIw'''(x)\hat{w}(x) + EIw''(x)\hat{w}'(x) \right]_0^l \\ &+ \int_0^l EIw''(x)\hat{w}''(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Setzt man in der Gleichung (2.3) für die Querkraft $V(x) = -EIw'''(x)$ und für die Biegemoment $M(x) = -EIw''(x)$ ein, dann entspricht dies in der Statik dem ‚Prinzip der virtuellen Verrückung‘ und in der Mathematik der ‚ersten Green’schen Identität‘

$$\begin{aligned} G(w, \hat{w}) &= \underbrace{\int_0^l p(x)\hat{w}(x) dx + \left[V(x)\hat{w}(x) - M(x)\hat{w}'(x) \right]_0^l}_{\text{virtuelle äußere Arbeit}} \\ &- \underbrace{\int_0^l \frac{M(x)\hat{M}(x)}{EI} dx}_{\text{virtuelle innere Arbeit}} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Glattheitsforderungen müssen erfüllt sein, diese sind für $w(x) \in C^4[0, l]$ und für $\hat{w}(x) \in C^2[0, l]$. Das heißt, die vierte Ableitung der Funktion $w(x)$ muss noch stetig sein, und die zweite Ableitung der Funktion $\hat{w}(x)$ muss auch

stetig sein.

Vertauscht man in (2.4) $w(x)$ und $\hat{w}(x)$ miteinander, erhält man das ‚Prinzip der virtuellen Kräfte‘

$$\begin{aligned} G(\hat{w}, w) &= \int_0^l \hat{p}(x)w(x) dx + \left[\hat{V}(x)w(x) - \hat{M}(x)w'(x) \right]_0^l \\ &- \int_0^l \frac{\hat{M}(x)M(x)}{EI} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\forall \hat{w} \in C^4[0, l] \text{ und } w \in C^2[0, l].$$

Subtrahiert man die beiden Identitäten voneinander, so bekommt man den ‚Satz von Betti‘, die zweite Green’sche Identität,

$$B(w, \hat{w}) = G(w, \hat{w}) - G(\hat{w}, w) = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} B(w, \hat{w}) &= \int_0^l p(x)\hat{w}(x) dx + \left[V(x)\hat{w}(x) - M(x)\hat{w}'(x) \right]_0^l \\ &- \left[\hat{V}(x)w(x) - \hat{M}(x)w'(x) \right]_0^l - \int_0^l \hat{p}(x)w(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Der ‚Satz von Betti‘ beschreibt, dass die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems auf den Wegen des zweiten Systems leisten, gleich den Arbeiten sind, die die Kräfte des zweiten Systems auf den Wegen des ersten Systems leisten. [3], S.56 ff.. Der ‚Satz von Betti‘ kann auch als ‚Satz der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeit‘ bezeichnet werden, [6].

$G(w, \hat{w}) = 0$	Prinzip der virtuellen Verrückungen
$G(\hat{w}, w) = 0$	Prinzip der virtuellen Kräfte
$B(w, \hat{w}) = G(w, \hat{w}) - G(\hat{w}, w) = 0$	Satz von Betti

Tabelle 2.1: Zusammenfassung der Green'schen Identitäten.

2.2 Die Einflussfunktionen

Die Einflusslinien spielen für den Tragwerksplaner eine große Rolle, mit deren Hilfe kann der Tragwerksplaner alle Weg- bzw. Kraftgrößen eines Tragwerks bestimmen. Die Einflussfunktionen erfassen den Einfluss von ortsveränderlichen Lasten auf einzelne Zustandsgrößen. Um eine Einflussfunktion zu erzeugen, bringt man auf das Tragwerk eine der ‚Singularitäten‘ δ_i als Belastung auf, Siehe Tab. 2.2. Die Einflussfunktion ist dann die Biegelinie, die aus diesem Lastfall resultiert.

Duale Belastung			Greensche Funktion
Einzelkraft	δ_0	↓	$G_0(y, x)$
Moment	δ_1	⊙	$G_1(y, x)$
Knick	δ_2	∨	$G_2(y, x)$
Versatz	δ_3	∧	$G_3(y, x)$

Tabelle 2.2: Duale Größen zur Berechnung von Einflussfunktionen am Balken und der schubstarrten Platte aus [1] S. 17.

Da wir in der Statik meistens über Energie sprechen, betrachten wir nicht die Lasten selber, sondern die Arbeit, die diese Lasten auf die virtuelle

Verrückung leisten. Eine Einzellast $p = 1$ leistet eine $\delta w(x)$ auf die virtuelle Verrückung δw . siehe [4] S.69 ff. Um diese Arbeiten zu erklären, betrachten wir die ‚Dirac’sche-Delta-Funktion‘. Siehe Kapitel 2.2.1.

2.2.1 Die Dirac’sche-Delta-Funktion

Die ‚Dirac’sche-Delta-Funktion‘ lautet wie folgt:

$$\delta_i(y, x) = \begin{cases} 0 & y \neq x \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(y, x) dy = 1. & \end{cases} \quad (2.8)$$

Wie man sehen kann, tritt diese Funktion nur an die Stelle x , und besitzt die Intensität ‚1‘. Wenn ein Dirac-Delta $\delta_i(y, w)$ mit einer beliebigen Funktion $w(y)$ überlagert wird, dann ergibt sich ein Wert von w an der Stelle x , der zu $\delta_i(y, x)$ konjugiert wird. Siehe Tabelle 2.2. Für einen Balken erhält man:

$$\int_0^l \delta_0(y, x) w(y) dy = w(x) \cdot 1 = w(x) \quad \text{Einzelkraft} = 1$$

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) dy = w'(x) \quad \text{Moment} = 1$$

$$\int_0^l \delta_2(y, x) w(y) dy = M(x) \quad \text{Knick} = 1$$

$$\int_0^l \delta_3(y, x) w(y) dy = V(x) \quad \text{Versatz} = 1$$

Wenn man einen Stab betrachtet, erhält man aus der Differentialgleichung $-EAu''(x) = p(x)$ folgende Gleichungen

$$\int_0^l \delta_0(y, x) u(y) dy = u(x) \quad \text{Einzelkraft} = 1$$

$$\int_0^l \delta_1(y, x) u(y) dy = N(x) \quad \text{Versatz} = 1$$

2.2.2 Die Statik und die Einflussfunktionen

Wie in Kapitel 2.1 erwähnt wurde, ist der ‚Satz von Betti‘ ein Zugang zu den Einflussfunktionen. Es wird in diesem Abschnitt beschrieben, wie man mit Hilfe des ‚Satzes von Betti‘ die Einflussfunktionen berechnet.

IN Kapitel 2.1 haben wir den ‚Satz von Betti‘ für einen Balken mit konstanter EI hergeleitet, um die Einflussfunktion aus dem ‚Satz von Betti‘ herzuleiten, nehmen wir als Beispiel einen gelenkig gelagerten Balken auf starren Lagern.

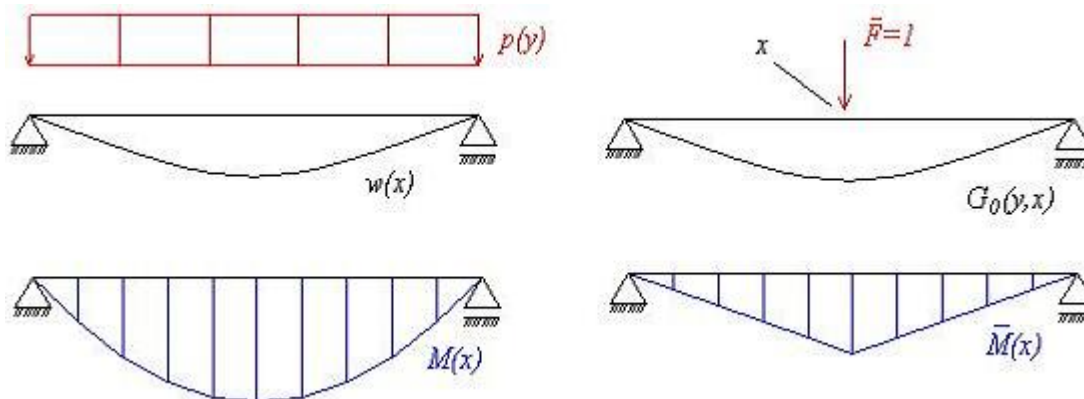


Abbildung 2.1: Ermittlung der Durchbiegung an einem gelenkig gelagerten Balken auf starren Lagern mittels Einflussfunktion.

Wird der ‚Satz von Betti‘ an dem Beispiel auf Abb. 2.1 angewendet, dann folgt aus Gleichung 2.7

$$B(w, \hat{w}) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy - 1 \cdot w(x) = 0,$$

wobei $w(x)$ die Biegelinie aus der Gleichlast und $G_0(y, x)$ die Biegelinie aus der Einzellast $\bar{F} = 1$ ist. Die Funktion $G_0(y, x)$ bezeichnet man in der Ma-

thematik als die ‚Green’sche Funktion‘, und in der Statik entspricht dieser Ausdruck der Einflussfunktion. Die Angriffstelle der Wanderlast wird mit y bezeichnet und die Stelle, an der die Durchbiegung gerechnet werden muss, wird mit der Variablen x bezeichnet. Die Funktion für die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle x lautet

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x)p(y) dy. \quad (2.9)$$

Alle Einflussfunktionen haben dieselbe Bauart (2.9), nur die ‚Green’sche Funktion‘ ändert sich. Siehe Tabelle 2.2.

2.3 Die Finite-Elemente-Methode

Dieser Abschnitt handelt von der Methode der Finiten Elemente, und ihre Einsatzmöglichkeiten in der Statik. Zur Zeit werden die FEM-Programme häufiger in der Statik eingesetzt und das Ziel dieses Förschungsvorhabens ist die Entwicklung dieser Programme, um die Sensitivitätsanalyse durchzuführen. Die Finite-Elemente-Methode ist ein Näherungsverfahren, ihre Genauigkeit hängt von dem benutzten FE-Netz und der verwendeten Elementformulierung ab.

In der klassischen Statik verwendet man die Gleichgewichtsbedingung, die in (2.1) dargestellt ist, um die Biegelinie $w(x)$ eines Balkens zu rechnen, wobei alle möglichen $w(x)$ aus der unendlichen dimensionalen Verformungsraum V sind. In der modernen Statik, zu der die Methode der finiten Elemente und die Methode der Randelemente zählen, kann gezeigt werden, dass man

mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückung und der Betrachtung des ursprünglichen Randwertproblems ein Variationsproblem formulieren kann. Das Variationsproblem lautet nach [2]

$$\begin{aligned} & \text{Finde eine Biegelinie } w(x) \in V, \text{ welche die Variationsgleichung} \\ & a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \text{für alle } \hat{w}(x) \in V \text{ erfüllt} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Der Einsatz des Variationsproblems in der FEM ist so zu lösen, dass die verschiedenen Biegelinien nicht mehr im Raum V zu finden sind, sondern im Raum $V_h \subset V$ siehe Abb.2.2, somit lautet dann das Variationsproblem nach [2]

$$\begin{aligned} & \text{Finde eine Biegelinie } w_h(x) \in V_h \subset V, \text{ welche die Variationsgleichung} \\ & a(w_h, \hat{w}_h) = (p, \hat{w}_h) \quad \text{für alle } \hat{w}_h(x) \in V_h \subset V \text{ erfüllt} \end{aligned} \quad (2.11)$$

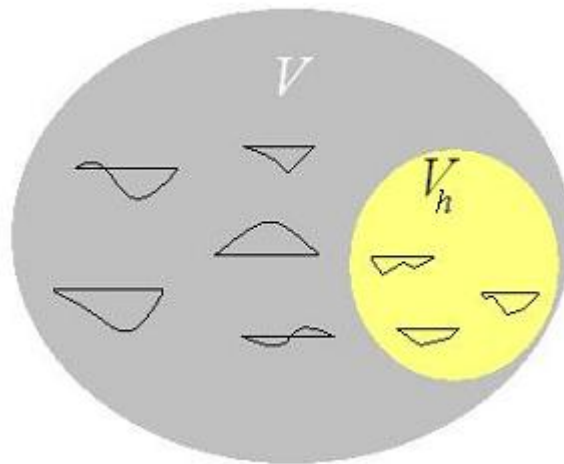


Abbildung 2.2: Alle möglichen Biegelinien, die ein FE-Programm darstellen kann, liegen in der endlichen dimensional V_h , die in V liegt.

Für $w_h(x)$ wählt man die Ansatzfunktionen $\phi_j(x)$, die den Raum V_h aufspannen und erhält

$$a(w_h, \phi_j) = (p, \phi_j) \quad (2.12)$$

und so ist die FE-Lösung $\hat{w}_h(x)$ eine Entwicklung nach diesen Ansatzfunktionen

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x), \quad (2.13)$$

w_i ist die Knotenverschiebung und $\phi_i(x)$ ist die zugehörige Einheitsverformung aus V_h . Aus der Variationsgleichung (2.12) erhalten wir Folgendes

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^l EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx, \\ \mathbf{f} &= f_j = (p, \phi_j) = \int_0^l p(x) \phi_j(x) dx \\ i &= 1, 2, \dots, n \quad \text{und} \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Das führt zu dem berühmten Gleichungssystem $\mathbf{K}\mathbf{w}=\mathbf{f}$, wobei \mathbf{k} die symmetrische Steifigkeitsmatrix ist, \mathbf{w} den Verformungsvektor bezeichnet und \mathbf{f} der Vektor der äquivalenten Knotenkräfte ist. Mehr Informationen und Einsatzmöglichkeiten der Finite-Elementen-Methode findet man in [4],[5] und [7].

2.3.1 FEM: Genährte Einflussfunktionen

Die Einflussfunktionen, die mit Hilfe eines FE-Programms erzeugt sind, sind genährte Einflussfunktionen, siehe Abschnitt 2.3. Die FE-Lösung hat dieselben Bauart wie (2.9), und lautet wie folgt

$$w_h(x) = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy. \quad (2.15)$$

Im Gegensatz zu (2.9) wird hier die Projektion der ‚Green’schen Funktion‘ auf V_h verwendet, d.h. in der FE-Lösung besteht ein Fehler, der wie folgt berechnen werden kann: [4].

$$w(x) - w_h(x) = \int_0^l [G_0(y, x) - G_0^h(y, x)] p(y) dy \quad (2.16)$$

Die Ermittlung der Einflussfunktionen mit Hilfe der FE-Methode kann wie in Abschnitt 2.2 laufen. Man setzt in einen gesuchten Punkt x eine Einzelkraft, ein Moment o.ä. Aus der Tabelle 2.2 ein, und löst diesen Lastfall. Aber das FE-Programm muss diese Belastung in äquivalente Knotenkräften umwandeln bevor es diesen Lastfall lösen kann, siehe (2.14).

Zur Darstellung einer Einzelkraft $F = 1$ wird wie in Abschnitt 2.2.1 dargestellt, die ‚Dirac’sche-Delta-Funktion‘ verwendet, und die Einheitsverformungen als virtuelle Verrückung eingesetzt. Dabei sieht die ‚Dirac-Delta-Funktion‘ wie folgt aus:

$$\int_0^l \delta_0(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i(x), \quad (2.17)$$

siehe [4], und die ‚höheren Dirac-Delta-Funktionen‘ lauten für einen Balken:

$$\int_0^l \delta_1(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i'(x) \quad \text{Moment}$$

$$\int_0^l \delta_2(y, x) \phi_i(y) dy = M_i(x) \quad \text{Knick}$$

$$\int_0^l \delta_3(y, x) \phi_i(y) dy = V_i(x) \quad \text{Versatz}$$

Die Arbeiten, die man aus der ‚Dirac’schen-Delta-Funktion‘ errechnet, sind die nötigen äquivalenten Knotenkräfte.

$$f_i = \int_0^l \delta_0(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i(x). \quad (2.18)$$

Beispiel: Die Einflussfunktion für die Querkraft an der Balkenmitte $V(\frac{l}{2})$ ist mit Hilfe einer Versetzung zu rechnen

$$f_i = \int_0^l \delta_3(y, \frac{l}{2}) \phi_i(y) dy = V_i(\frac{l}{2}),$$

für diesen Lastfall sind die Querkräfte der Einheitsverformungen ϕ_i an der Stelle $x = \frac{l}{2}$.

Die Einheitsverformungen des schubstarren ‚Bernoulli-Balkens‘ lauten: [5]

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_E^2} + \frac{2x^3}{l_E^3} \\ \phi_2(x) &= \left(-\frac{x}{l_E} + \frac{2x^2}{l_E^2} - \frac{x^3}{l_E^3} \right) l_E \\ \phi_3(x) &= \frac{3x^2}{l_E^2} - \frac{2x^3}{l_E^3} \\ \phi_4(x) &= \left(\frac{x^2}{l_E^2} - \frac{x^3}{l_E^3} \right) l_E. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ein Balkenelement mit konstanter Biegesteifigkeit hat die folgende Querkraft

$$V_i(x) = -EI\phi_i'''(x), \tag{2.20}$$

mit $\phi_i(x)$ als die Biegelinie des Balkens aus der Einheitsverformung sind damit die äquivalenten Knotenkräfte:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) = V_1(x) &= -EI\phi_1'''(x) = -EI \left(\frac{12}{l_E^3} \right) \\
 f_2(x) = V_2(x) &= -EI\phi_2'''(x) = -EI \left(-\frac{6}{l_E^2} \right) \\
 f_3(x) = V_3(x) &= -EI\phi_3'''(x) = -EI \left(-\frac{12}{l_E^3} \right) \\
 f_4(x) = V_4(x) &= -EI\phi_4'''(x) = -EI \left(-\frac{6}{l_E^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ein Balken der Länge $5m$, der in 5 Teile mit gleicher Länge zerlegt wurde, folgt den äquivalenten Knotenkräften, die auf der folgenden Abbildung dargestellt sind.

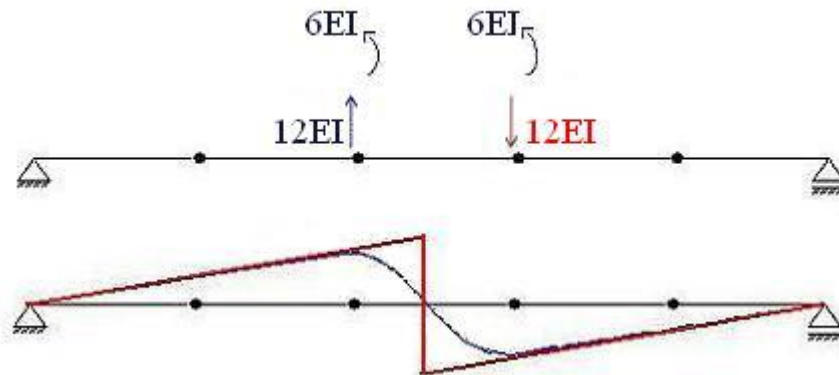


Abbildung 2.3: **Oben:** Die äquivalenten Knotenkräfte für die FE-Querkräft in der Balkenmitte. **Unten:** Rot zeigt die exakte Lösung, blau die FE-Lösung.

3 Die Sensitivitätsanalyse

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Sensitivitätsanalyse und der Vorhersehbarkeit der Änderungen in einem System. Es wird zuerst die allgemeine Formel anhand eines kleinen Beispiels hergeleitet, danach werden ihre Einsatzmöglichkeiten geklärt.

3.1 Die Änderung der Biegesteifigkeit in einem System

In Tragwerken treten oft Steifigkeitsänderungen auf, diese Änderungen können beispielsweise aufgrund von Rissen im Beton entstehen. In diesem Abschnitt wird eine Formel hergeleitet, die die Wirkungen dieser Änderungen bestimmt.

Ein Balken aus Beton mit einer konstanten Biegesteifigkeit EI ist gelenkig über zwei Auflagern gelagert. Entstehen in dem Balken in einem bestimmten Bereich Risse, ändert sich dabei die Biegesteifigkeit dieses Bereichs $EI_2 = EI_1 + \Delta EI$. In Abschnitt 2.2 wird die Herleitung der Gleichung (2.9) gezeigt, anhand dieser Gleichung ist

$$M(x) = \int_0^l G_2(y, x)p(y) dy \quad (3.22)$$

diese Gleichung gilt für den ungerissenen Zustand, und

$$M_c(x) = \int_0^l G_2^c(y, x)p(y) dy \quad (3.23)$$

ist der Momentenverlauf in dem gerissenen Zustand. Aus diesen beiden Gleichungen finden wir heraus, dass

$$M_c(x) - M(x) = \int_0^l [G_2^c(y, x) - G_2(y, x)] p(y) dy \quad (3.24)$$

ist. $G_2(y, x)$ ist die Einflussfunktion für $M(x)$ in dem ungerissenen Zustand und G_2^c in dem gerissenen Zustand. Diese Formel äußert die Aussage: , wenn wir die Änderung einer Schnitt- bzw. Weggröße berechnen wollen, sollen wir über die ganze Balkenlänge integrieren und alle Integrationspunkte y in Betracht nehmen'. Das wäre sehr aufwendig, insbesondere wenn wir größere und komplexere Systeme behandeln.

Wenn ein Tragwerk im Gleichgewicht ist, dann ist bei jeder virtuellen Verrückung die virtuellen äußeren Arbeiten gleich den virtuellen inneren Arbeiten

$$\delta A_a = \delta A_i. \quad (3.25)$$

Dies gilt für das ursprüngliche Tragwerk, wie auch für das geänderte, das gerissene Tragwerk

$$\delta A_a^c = \delta A_i^c \quad c = \text{change}. \quad (3.26)$$

Da sich aber die Belastung nicht ändert, müssen bei gleicher virtueller Verrückung der beiden Tragwerke die virtuellen äußeren Arbeiten gleich groß sein

$$\delta A_a = \delta A_a^c, \quad (3.27)$$

daher müssen auch die beiden virtuellen inneren Arbeiten gleich groß sein

$$\delta A_i = \delta A_a = \delta A_a^c = \delta A_i^c. \quad (3.28)$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückung für einen Balken lautet

$$\delta A_i = \int_0^l EI w'' v'' dx = \int_0^l p v dx = \delta A_a \quad v \in V. \quad (3.29)$$

Wenn $EI \longrightarrow EI + \Delta EI$ in einem bestimmten Bereich des Balkens wird, dann lautet die Gleichung

$$\delta A_i^c = \int_0^l EI w_c'' v'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' v'' dx = \int_0^l p v dx = \delta A_a^c \quad v \in V. \quad (3.30)$$

Hierbei ist w_c die Biegelinie an dem modifizierten Träger. Man beachte, dass durch die Modifikation der Steifigkeit sich in virtuelle innere Energie um einen additiven Term ändert. Wählen wir jetzt eine bestimmte virtuelle Verrückung für das Beispiel, hier wählen wir eine ‚Green’sche Funktion‘, siehe Tabelle 2.2. In diesem Fall lautet das Prinzip der virtuellen Verrückung am ursprünglichen Träger

$$\delta A_i = \int_0^l EI w'' G'' dx = \int_0^l p G dx = \delta A_a. \quad (3.31)$$

Am modifizierten Träger liefert die Substitution $v \longrightarrow G$ das Ergebnis

$$\delta A_i^c = \int_0^l EI w_c'' G'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx = \int_0^l p G dx = \delta A_a^c. \quad (3.32)$$

aufgrund von $\delta A_a^c = \delta A_a = \delta A_i$ können wir dafür schreiben

$$\int_0^l EI w'' G'' dx = \int_0^l EI w_c'' G'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx \quad (3.33)$$

oder

$$\int_0^l EI w_c'' G'' dx - \int_0^l EI w'' G'' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx, \quad (3.34)$$

setzen wir in dieser Gleichung die Green’sche Funktion G_0 , dann erhalten wir

$$w_c(x) - w(x) = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G_0'' dx, \quad (3.35)$$

Das Integral auf der rechten Seite erstreckt sich nur über den Bereich des Tragwerks, in dem sich die Steifigkeiten ändern. Anders gesagt, wir können allein durch Integration über den modifizierten Bereich voraussagen, wie sich die Durchbiegung an Punkt x ändert, wenn sich in einem Teil des Tragwerks die Steifigkeit ändert.

Mit dieser Technik lassen sich auch alle anderen Änderungen, die Änderungen der Momente, Querkräfte, Lagerkräfte, etc. berechnen. Man muss nur die entsprechende Einflussfunktion als virtuelle Verrückung wählen

$$j(u_c) - j(u) = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx, \quad (3.36)$$

wobei $j(\cdot)$ eine Funktion ist,

$$j(u) = w(x) \quad j(w) = M(x) \quad \text{usw.} \quad (3.37)$$

angenommen dass $e_u = u_c - u$, daraus folgt

$$j(e_u) = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx \quad (3.38)$$

$$j(e_u) = -d(u_c, G) \quad (3.39)$$

Das selbe Ergebnis kann mit u und G_c erzielt werden, wobei G_c die ‚Green’sche Funktion‘ für $j(u)$ in dem gerissenen Zustand ist. Dabei fällt auf, dass

$$G_c \in V : \quad a(G_c, v) + d(G_c, v) = j(v) \quad v \in V \quad (3.40)$$

ist, und damit können wir $j(e_u)$ nach folgender Gleichung ausrechnen

$$j(e_u) = a(e_u, G_c) + d(e_u, G_c) = -d(u_c, G_c) + d(e_u, G_c) = -d(u, G_c), \quad (3.41)$$

also

$$j(e_u) = -d(u_c, G) = -d(u, G_c). \quad (3.42)$$

Dasselbe kann auch für eine FEM-Lösung festgelegt werden, wobei in einem FEM-Lösung $e_u^h = u_c^h - u_h$ ist,

$$j(e_u^h) = -d(u_c^h, G_h) = -d(u_h, G_c^h). \quad (3.43)$$

$$j(e_u^h) = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c^{h''} G_h'' dx = \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_h'' G_c^{h''} dx. \quad (3.44)$$

Bei näherer Betrachtung hat die Formel (3.41) noch einen Nachteil, denn um die Änderung zwischen dem normalen Zustand und dem modifizierten Zustand zu bestimmen, muss uns die Lösung u für den normalen Zustand und G_c für den modifizierten Zustand bekannt sein (oder andersherum). Diese Methode ist genau deswegen unpraktisch, da wenn wir die Gleichungen für beide Systeme formulieren, können wir direkt zwischen u und u_c vergleichen.

Die Idee ist naheliegend, die Biegelinie u_c durch die Biegelinie u anzunähern, oder genauer, anzunehmen, dass die Differenz $u_c'' - u''$ in Intervall $[x_1, x_2]$ orthogonal zu den Krümmungen G'' der Einflussfunktion ist, denn dann folgt

$$\begin{aligned} w_c(x) - w(x) &= - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI (w_c'' - w'') G'' dx - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dx \\ &\simeq - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

oder

$$j(e_u) \simeq -d(u, G). \quad (3.46)$$

In dieser Formel stammen also beide Biegelinien, w und G , von dem ursprünglichen Tragwerk. Mit ihr kann man prognostizieren, welchen Einfluss Steifigkeitsänderungen auf die Verformungen, die Schnittkräfte und die Lagerkräfte eines Tragwerks haben werden. Für einen Balken lautet dann die Formel:

$$j(e_u) \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dy \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_i}{EI} dx. \quad (3.47)$$

Beispiel In Abb. 3.4 ist ein Zweifeldträger aus HEA200 dargestellt. Falls die Biegesteifigkeit im zweiten Feld sich um 32% verringert, wir es im System eine Änderung im Momentenverlauf geben. In diesem Beispiel wollen wir die Änderung in der Mitte des zweiten Feldes mit der genäherten Formel errechnen, und auch ihre Ungenauigkeit zu der exakten Änderung.

$$M_c(x) - M(x) \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_2}{EI} dx$$

$$M_c(6,5) - M(6,5) \simeq -\bar{3} \cdot -0,32 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{(-1424,85)(2 \cdot 3,42 - 15,65)}{7753,515} = 0,26.$$

Die exakte Änderung in diesem Beispiel ist

$$M_c(6.5) - M(6,5) = 0,46,$$

dabei stellen wir fest, dass es eine Ungenauigkeit von etwa 43% gibt. Die Formel (3.47) hat 2 Kalibrierungen, die bessere Ergebnisse und Genauigkeiten

geben. Diese 2 Formeln lauten:

$$j(e_u) \simeq -\frac{\Delta EI}{EI + \Delta EI} \int_{x_1}^{x_2} \frac{MM_i}{EI} dx \quad (3.48)$$

$$j(e_u) \simeq -\frac{\Delta EI}{EI + 0,5 \cdot \Delta EI} \int_{x_1}^{x_2} \frac{MM_i}{EI} dx. \quad (3.49)$$

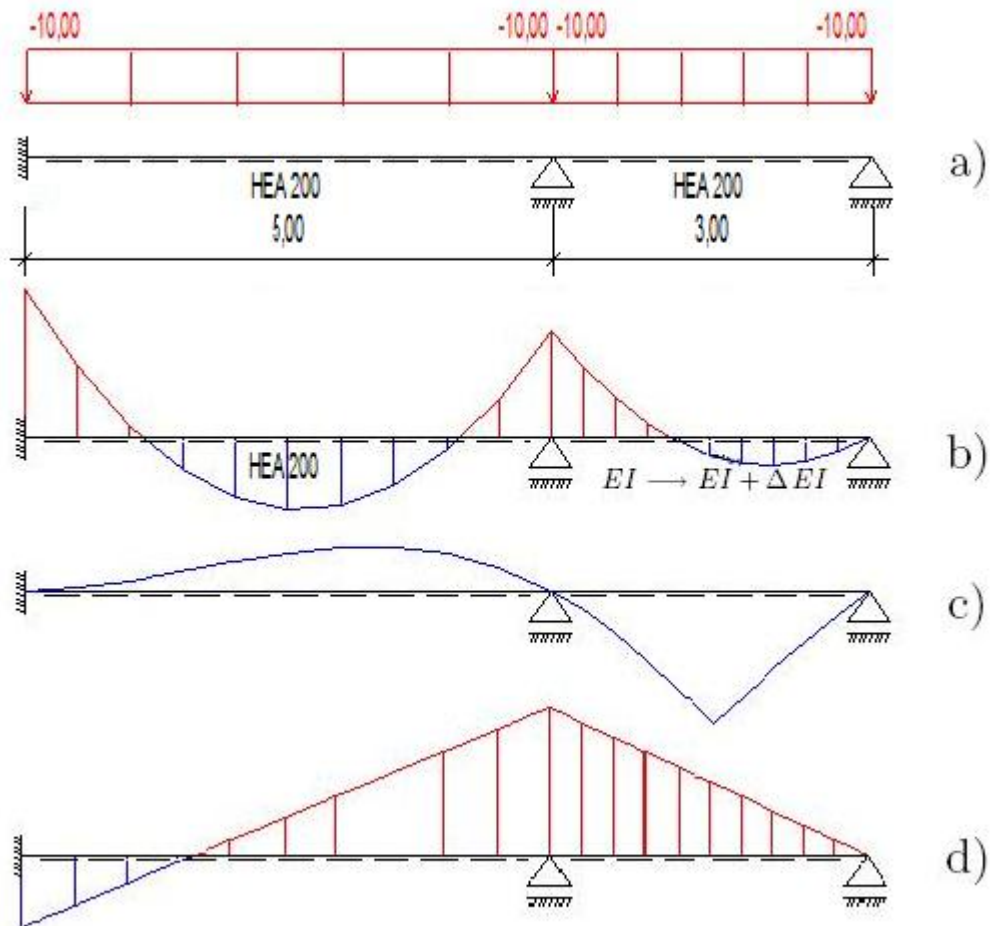


Abbildung 3.4: Durchlaufträger - Biegesteifigkeitsänderung in einem bestimmten Bereich; a) Durchlaufträger unter Streckenlast, b) Momentenverlauf aus der Streckenlast, c) Einflussfunktion für das Moment in der Mitte des zweiten Feldes und d) Momente aus der Einflussfunktion

Wir berechnen das Beispiel noch einmal mit diesen Formeln und stellen wir die Ergebnisse Tabellarisch dar.

	$M_c(x) - M(x)$	$M_{exakt} - M_{naeherung}$
1. Näherung	0,26	0,2(43%)
2. Näherung	0,38	0,08(17%)
3. Näherung	0,31	0,15(33%)

Tabelle 3.3: Änderung der Momente an der Stelle $x = 6,5$, ermittelt Durch die Formeln (3.47),(3.48) und (3.49). In Klammern sind die Abweichungen vom exakten Ergebnis in % dargestellt.

Wir entnehmen die Ergebnisse aus der Tabelle(3.3), dabei stellen wir fest dass die 2. Variante die beste Lösung mit einer Abweichung von 17% geliefert hat. Ob das für alle Systeme und Tragwerke gilt, wird im nächsten Kapitel diskutiert und anhand mehrerer Beispiele gezeigt werden.

3.2 Anwendungen

In Abschnitt 3.1 wurde eine Näherungsformel hergeleitet, die im Fall einer Änderung in der Biegesteifigkeit eines bestimmten Schnittes im System eingesetzt werden kann. Aus der Formel(3.46) können aber auch viele andere Anwendungen der Sensitivitätsanalyse in ebenen und räumlichen Rahmen erfolgen, die in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Biegesteifigkeitsänderung in einem Balken

Wenn sich die Biegesteifigkeit eines Abschnitts $[x_1, x_2]$ in einem Rahmen ändert, dann ist die Änderung in jeder Größe $\partial^i w$ (w, w', M, V) an der Stelle x gleich

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \cdot \frac{MM_i}{EI} dx \quad (3.50)$$

wobei M_i das Moment aus der Green'schen Funktion G_i für $\partial^i w$ ist, und M das Moment aus der Last p ist.

Änderung der Lagerfestigkeit, $k \rightarrow \Delta k$

Wenn sich die Steifigkeit einer Feder ändert, $k \rightarrow \Delta k$, dann ändert sich die Verzerrungsenergie nach der Formel

$$a(w, \hat{w}) + kw(l)\hat{w}(l) \longrightarrow a(w, \hat{w}) + (k + \Delta K)w(l)\hat{w}(l) \quad (3.51)$$

in diesem Fall ist $d(w, \hat{w}) = \Delta kw(l)\hat{w}(l)$ und wir erhalten für jede Größe $\partial^i w$ (w, w', M, V) an der Stelle x

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq -\Delta K \cdot G_i(l, x) \cdot w(l) \quad (3.52)$$

wobei ΔK die Steifigkeitsänderung des Auflagers ist, G_i ist die Federbewegung aufgrund der Belastung der Dirac-delta δ_i und $w(l)$ ist die Federbewegung aufgrund des Lastfalls.

Ist aber die Zunahme sehr groß, $k \rightarrow \infty$, dann können wir nur mit Hilfe der exakten Formel die Änderung ausrechnen

$$J(w_c) - J(w) = -d(w, G_c) = -\Delta k \cdot G_c(l, x) \cdot w(l) = -R_G \cdot w(l), \quad (3.53)$$

in der Formel ist R_G die Auflagerreaktion aus der Dirac-delta Funktion.

Ausfall eines Lagers

Für den Fall, dass ein Auflager im Rahmen ausfällt, kann man die Änderung in jeder Größe $\partial^i w$ nach der Formel

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k_S} \quad (3.54)$$

errechnen, hier ist R_G die Auflagerkraft aus der ‚Dirac-delta Funktion‘, R_p ist die Auflagerkraft aus dem Lastfall und k_S ist die Steifigkeit des Systems in die Richtung des ausgefallenen Lagers.

Das Fließen eines Starren Auflagers

In dem Fall, dass ein starres Auflager fließt, ist die Änderung in jeder Größe $\partial^i w$ an der Stelle x gleich

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k}, \quad (3.55)$$

hier ist R_G die Auflagerreaktion aus der ‚Dirac-delta Funktion‘, R_p ist die Auflagerreaktion aus dem Lastfall und k ist die restliche Steifigkeit des Systems in die Richtung des Lagers.

Ausfall eines Rahmenselementes

Der Ausfall eines Rahmenselementes hat die Folge, dass die Biegesteifigkeit des Elementes gleich Null wird, $EI = 0$, oder eingesetzt in der Gleichung $EI + \Delta EI = 0 \rightarrow \Delta EI = -EI$, so wird

$$-d(w_c, G) = - \int_0^l \Delta EI w_c'' G'' dx = \int_0^l EI w_c'' G'' dy \quad (3.56)$$

wobei w_c die Form des Elements ist, wenn das Element seine ganze Biegesteifigkeit verloren hat und G die Einflussfunktion ist. In dieser Formel behandeln

wir den Fall, dass ein ganzes Element ausfällt, wenn aber nur ein bestimmter Abschnitt eines Elementes versagt, dann ist die Änderung jeder Größe $\partial^i w$ an der Stelle x gleich

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = \int_{x_1}^{x_2} EI w_c'' G_i'' dy. \quad (3.57)$$

Andere Anwendungen der Sensitivitätsanalyse z.B in Platten oder Scheiben können aus [4] entnommen werden. Im nächsten Kapitel werden ebene und räumliche Systeme untersucht, um die hergeleiteten Näherungsformeln zu testen, und eine Idee zu geben, wie man die Sensitivitätsanalyse einsetzen kann.

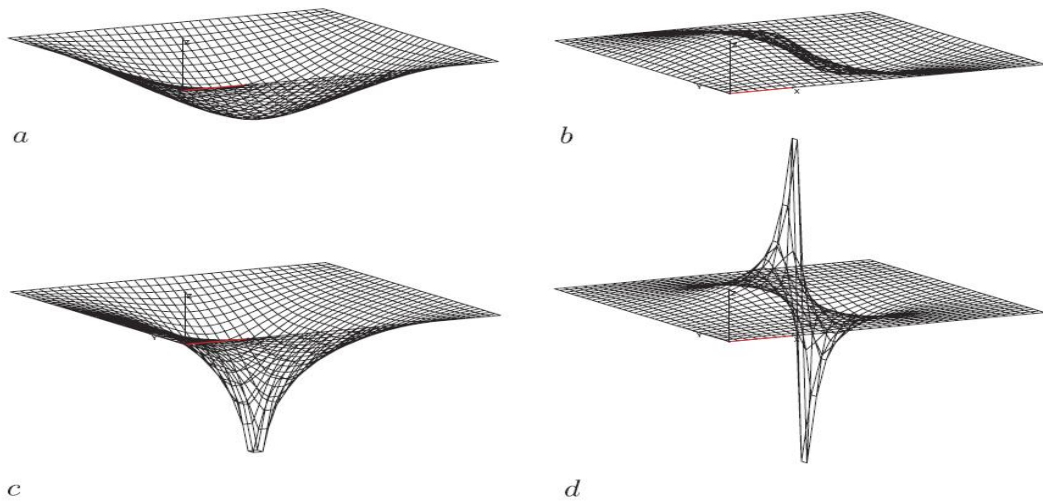


Abbildung 3.5: Einflussfunktionen für a) Die Durchbiegung w , b) die Verdrehung w_x , c) das Biegemoment m_{xx} und d) die Querkraft q_x im Mittelpunkt einer gelenkig gelagerten Platte. Aus [4]

4 Ausgewählte Beispiele

In diesem Kapitel werden die Weg- und Schnittgrößenänderungen auf ausgewählten ebenen und räumlichen Rahmen mit Hilfe der hergeleiteten Formeln berechnet. Die Systeme sind mit **TwoDFrame** für die ebenen Rahmen bzw. mit **ThreeDFrame** für die räumlichen Rahmen gerechnet.

Darstellung der Ergebnisse

In den ausgewählten Rahmen werden die Änderungen bestimmter Weg- bzw. Schnittgrößen in einigen bestimmten Punkten gesucht. Für die **Biegesteifigkeitsänderung** in einem bestimmten Bereich wird ein Rahmenelement mehrmals gewechselt, danach wird die Änderung der Weg- bzw. Schnittgröße in einem bestimmten Punkt mit Hilfe der EDV-Programme bemessen (exakte Änderung). Dann wird die Änderung mit den Näherungsformeln (3.47), (3.48) und (3.49) berechnet. Die Ergebnisse $\Delta \partial^i w$ aus den genäherten Formeln und die exakte Änderung werden nachher in einer Tabelle und einem Diagramm dargestellt.² Dasselbe gilt auch für die Untersuchung der Lagersteifigkeitsänderungen.

4.1 Beispiel - Stockwerksrahmen

In diesem Beispiel wird ein Stockwerksrahmen aus HEA260 Profilen und S235 Stahl untersucht. Alle Rahmenelemente haben die Länge $5m$ und sind biegesteif mit einander verbunden. Der Rahmen wird unter dem Lastfall

²In der Tabelle werden auch die Abweichungen der Näherungsformeln von dem exakten Wert in % gegeben und dann in einem separaten Diagramm dargestellt.

,Wind'³ untersucht. Es wird angenommen, dass die Windlast konstant über die Rahmenhöhe ist und $10\text{KN}/\text{m}$ beträgt. Im Folgenden wird die Änderung



Abbildung 4.6: Stockwerksrahmen - System und Belastung

des Momentes in der oberen rechten Ecke untersucht. Das Rahmenelement FE019 wird mehrfach gewechselt.

³Die Windlast wird hier mit $10\text{kN}/\text{m}$ angenommen, um größeren Momentenverlauf zu erzeugen.

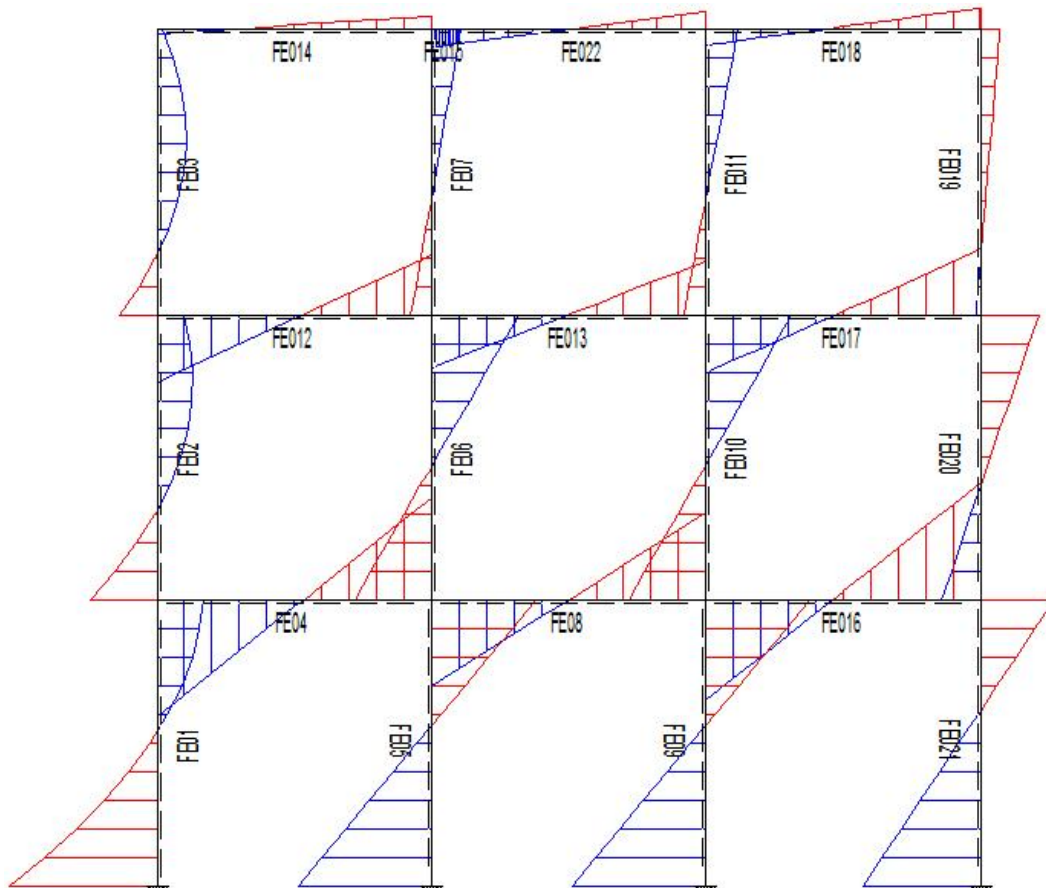


Abbildung 4.7: Stockwerksrahmen - Momentenverlauf aus der Windlast

Da wir die Momentenänderung untersuchen wollen, setzen wir einen Knick in der untersuchten Stelle. Laut der Formel (3.47) werden der Momentenverlauf aus dem Lastfall und der Momentenverlauf aus G_2 in dem gewechselten Rahmenelement miteinander überlagert, daraus resultiert:

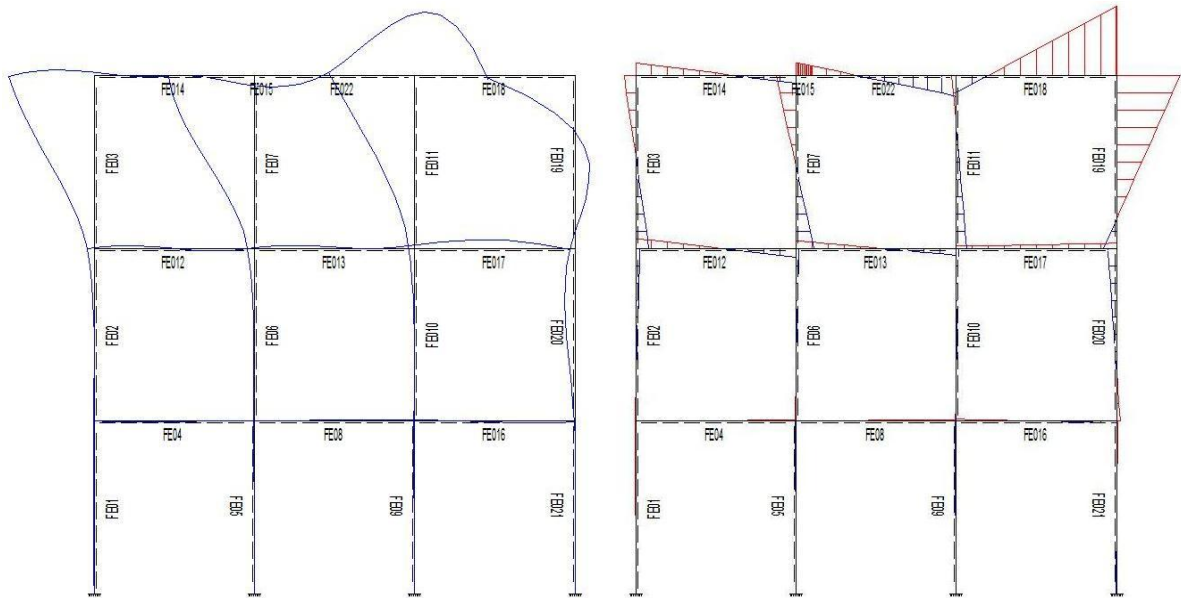


Abbildung 4.8: Stockwerksrahmen - **Links:** Verformungsfigur, **Rechts:** Momentenverlauf aus G_2 in der oberen rechten Ecke.

Profil	ΔM_{exakt}	ΔM_1	ΔM_2	ΔM_3
HEA180	-7,97	-4,57(43%)	-19,03(139%)	-7,37(8%)
HEA200	-6,06	-3,89(36%)	-11,02(82%)	-5,75(5%)
HEA220	-3,94	-2,90(26%)	-5,61(42%)	-3,83(3%)
HEA240	-1,80	-1,55(14%)	-2,09(16%)	-1,78(1%)
HEA280	1,61	1,85(15%)	1,42(12%)	1,60(<1%)
HEA300	3,29	4,48(37%)	2,57(22%)	3,27(<1%)

Tabelle 4.4: Stockwerksrahmen - Momentenänderung an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentätze in %.

Die Ergebnisse in Tabelle 4.4 sind in Abbildung 4.9 und 4.10 dargestellt.

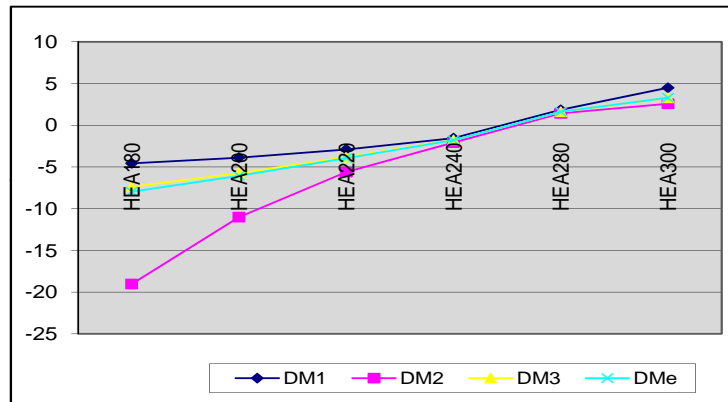


Abbildung 4.9: Stockwerksrahmen - Die Momentenänderungen aus Tabelle 4.4.

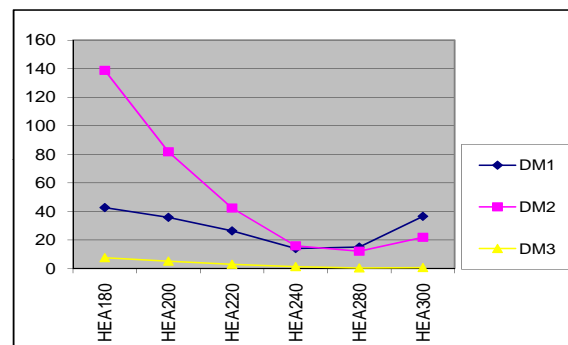


Abbildung 4.10: Stockwerksrahmen - Der Fehlerprozentsatz in den Momentenänderungen in % aus Tabelle 4.4.

Das Diagramm in der Abbildung 4.10 zeigt, dass die Differenzen zwischen den

exakten Ergebnissen und den Ergebnissen aus der Formel 3.49 am kleinsten sind. Für dieses System sind andere Fälle untersucht worden, die im Anhang zu finden sind.

4.2 Beispiel - Vierendeelträger

Im Folgenden wird ein Vierendeelträger aus IPE300 Profilen als Beispiel dienen. Die Abmessungen des Systems können aus der Abbildung 4.11 entnommen werden. Die Lagersteifigkeit beträgt 2000 kN/m . Das System wird für Querkraftänderung ΔV und Durchbiegungänderung Δw untersucht. Der Vierendeelträger ist unter dem Lastfall ‚Eigengewicht‘ beansprucht. Am An-

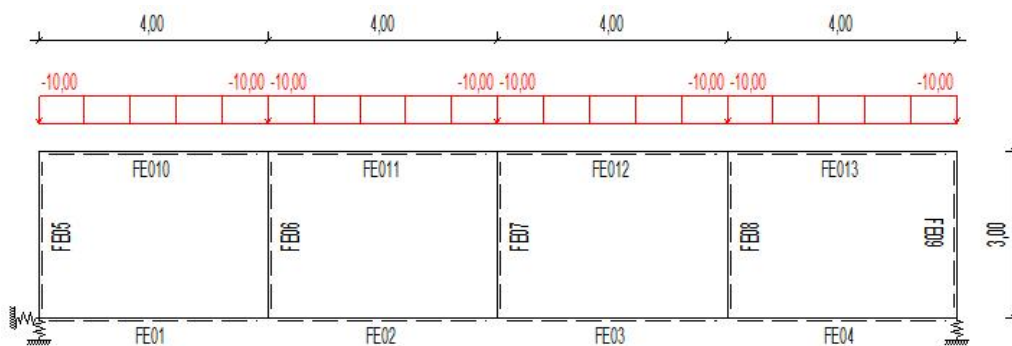


Abbildung 4.11: Vierendeelträger - System und Belastung.

fang testen wir das System für Querkraftänderung im Element $FE013$, wenn wir das Element $FE04$ tauschen. Die exakten Änderungen werden mit dem EDV-Programm bestimmt und um die hergeleiteten formeln zu benutzen, setzen wir einen Versatz an der Stelle $x = 3$ im Element $FE013$.

Wir setzen den Versatz an das Ausgangssystem und berechnen den Momentenverlauf. Danach überlagern wir den mit dem Moment aus dem Eigengewicht

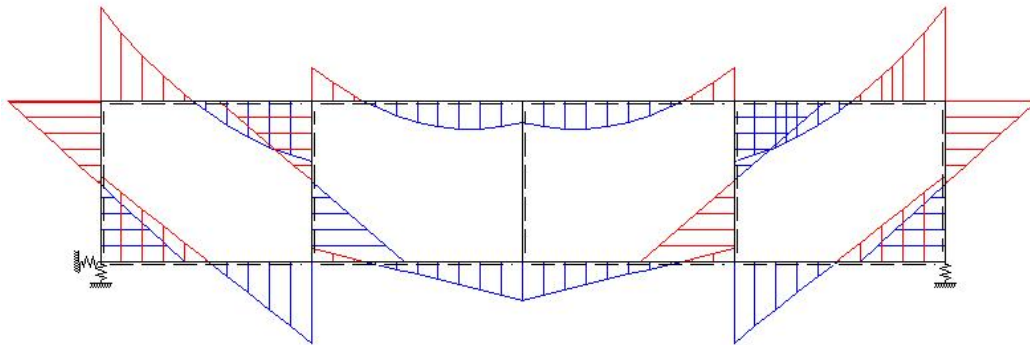


Abbildung 4.12: Vierendeelträger - Momentenverlauf aus dem Eigengewicht.

in dem gewechselten Element um die genäherten Änderungen zu bestimmen.

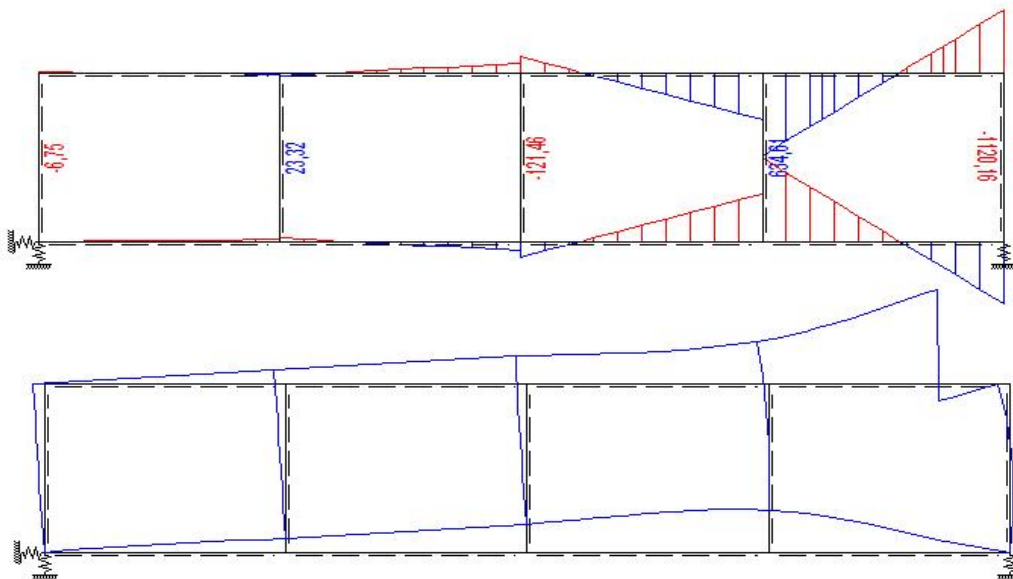


Abbildung 4.13: Vierendeelträger - **Oben:** Momentenverlauf, **Unten:** Verformungsfigur aus G_3 in der untersuchten Stelle.

Profil	ΔV_{exakt}	ΔV_1	ΔV_2	ΔV_3
IPE220	8,85	4,11(54%)	12,39(40%)	8,85(30%)
IPE240	5,74	3,29(43%)	7,05(23%)	5,74(22%)
IPE270	2,51	1,89(25%)	2,73(9%)	2,51(11%)
IPE330	-1,89	-2,51(33%)	-1,78(6%)	-1,89(10%)
IPE360	-3,32	-5,82(75%)	-2,99(10%)	-3,32(19%)

Tabelle 4.5: Vierendeelträger - Querkraftänderung in der untersuchten Stelle, In Klammern sind die Fehlerprozentätze in %.

Die Diagramme auf den Abbildungen 4.14 und 4.15 stellen die Werte aus Tabelle 4.5 dar.

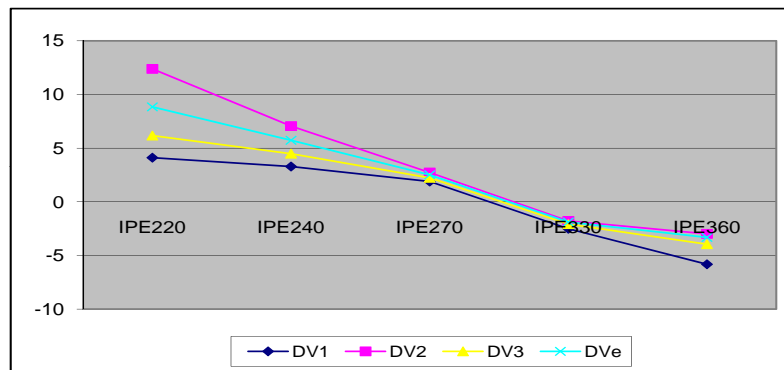


Abbildung 4.14: Vierendeelträger - Die Querkraftsänderungen aus Tabelle 4.5.

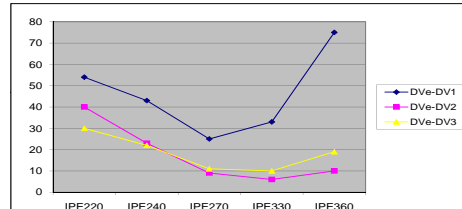


Abbildung 4.15: Vierendeelträger - Der Fehlerprozentatz in den Querkraftsänderungen in % aus Tabelle 4.5.

Aus dem Diagramm in Abbildung 4.15 lässt sich ablesen, dass die Formel (3.49) nicht immer die beste Näherung liefert. Die Formel (3.48) liefert bessere Näherungen, besonders wenn die Biegesteifigkeitsänderung nicht so groß ist. Dies System wurde auch für Lagersteifigkeitsänderung getestet, die Änderung in der Durchbiegung wurde gemessen. Hier benutzen wir die Formel (3.52) um die Änderung in der Durchbiegung abzuschätzen. Dabei setzen wir eine Einzelkraft an der untersuchten Stelle ein, wie es auf der folgenden Abbildung zu sehen ist. Die Lagersteifigkeit des linken vertikalen Lagers wird

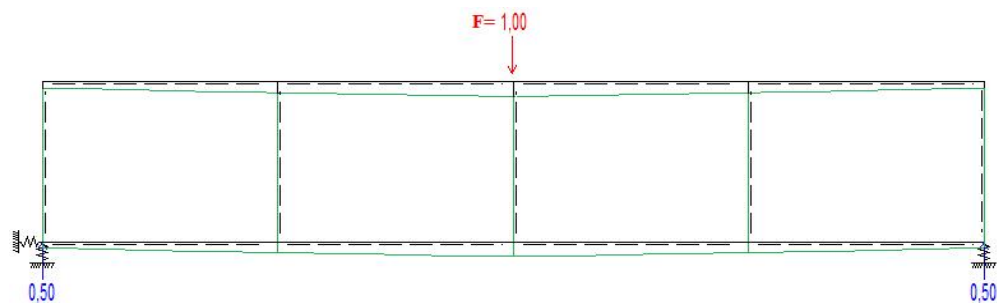


Abbildung 4.16: Vierendeelträger - Einzellast und Auflagerkräfte aus G_0 , Im Grün ist die Verformungsfigur.

mehrmals geändert und die exakten Durchbiegungsänderungen werden mit dem EDV-Programm festgestellt. Um die genäherte Werte zu bestimmen, benutzen wir die Formel

$$\Delta w = \frac{\Delta K}{K^2} \cdot G_0 \cdot w(l), \quad (4.58)$$

danach setzen wir die Werte in die folgenden Tabelle ein. Die Ergebnisse sind

ΔK	Δw_{exakt}	$\Delta w_{\text{naeherung}}$
1000	-20	-10(50%)
500	-6,67	-5(25%)
-500	4	5(25%)
-1000	6,67	10(50%)

Tabelle 4.6: Vierendeelträger - Durchbiegungsänderung in der untersuchten Stelle, In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.

Jetzt in den Folgenden Diagrammen dargestellt.

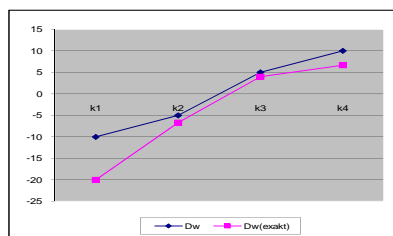


Abbildung 4.17:
Durchbiegungsänderung

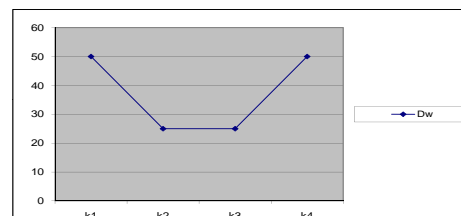


Abbildung 4.18:
Fehlerprozentsatz

Für das System ‚Vierendeelträger‘ ist noch ein Fall untersucht worden, der im Anhang zu finden ist.

4.3 Beispiel - Mehrfeldbrücke



Abbildung 4.19: Mehrfeldbrücke - System und Belastung

In diesem Beispiel untersuchen wir einen Mehrfeldbrückenrahmen, der Stahlrahmen ist aus HEA360 Profilen. Der linke vertikale Auflager ist nicht starr, seine Lagersteifigkeit beträgt 1000 kN/m . Die drei vertikalen Stäbe haben die Länge 4m. Der Stab $FE05$ ist eingespannt, die Stäbe $FE06$ und $FE07$ sind Pendelstäbe.

In diesem Beispiel werden wir die Momentenänderung im Stab $FE01$ an der Stelle $x = 4$ untersucht, wenn der Stab $FE05$ getauscht wird.

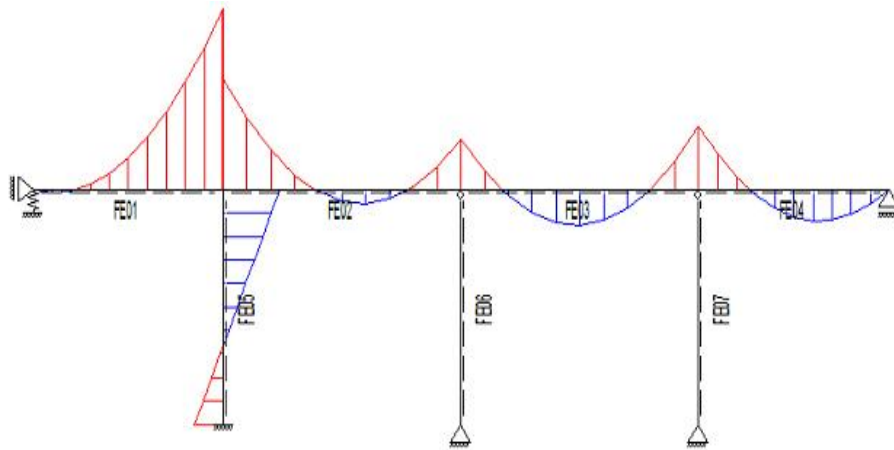


Abbildung 4.20: Mehrfeldbrücke - Momentenverläufe aus dem Lastfall.

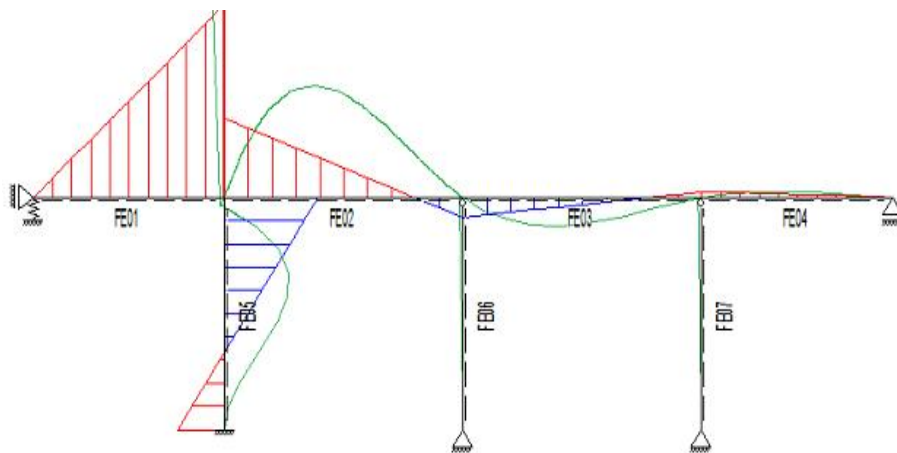


Abbildung 4.21: Mehrfeldbrücke - Momentenverläufe aus G_2 , im Grün ist die Veformungsfigur.

Wie in den vorherigen Beispielen werden die Momentenverläufe in dem gewechselten Element miteinander überlagert, die resultierenden Ergebnisse sind im der Tabelle 4.7 dargestellt.

Profil	ΔM_{exakt}	ΔM_1	ΔM_2	ΔM_3
HEA320	-0,89	-0,70(22%)	-1,00(13%)	-0,82(8%)
HEA340	-0,43	-0,37(14%)	-0,44(3%)	-0,40(7%)
HEA400	0,72	0,82(14%)	0,60(16%)	0,72(4%)
HEA450	1,46	2,10(44%)	1,09(25%)	1,46(2%)

Tabelle 4.7: Mehrfeldbrücke - Momentenänderung an der untersuchten Stelle,
In Klammern sind die Fehlerprozentätze in %.

Die Diagramme auf den Abbildungen 4.22 und 4.23 stellen die Werte aus der
Tabelle 4.7 dar.

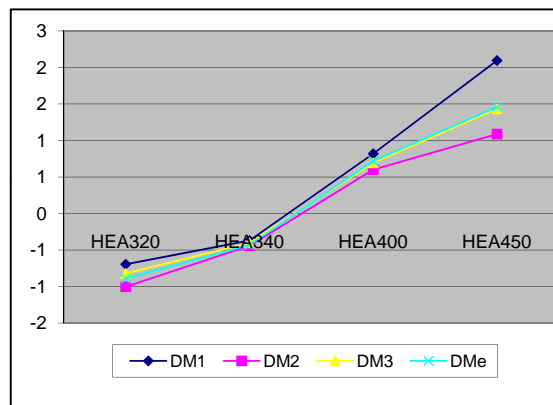


Abbildung 4.22: Mehrfeldbrücke - Die Momentenänderungen aus Tabelle 4.7.

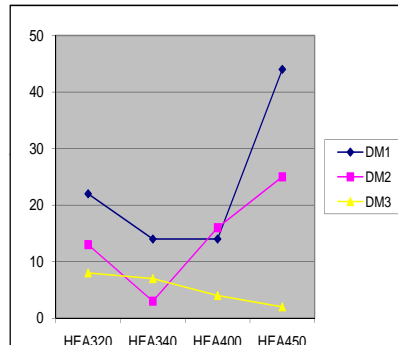


Abbildung 4.23: Mehrfeldbrücke - Der Fehlerprozentatz in den Momentenänderungen in % aus Tabelle 4.7.

Andere Fälle für dieses System befinden sich im Anhang.

4.4 Beispiel - Einfacher 3D-Rahmen

In diesem Beispiel wird die Momentenänderung eines einfachen 3D-Rahmens untersucht, der Stahlrahmen besteht aus HEA300 Profilen, die biegesteif miteinander verbunden sind. Die Länge aller Rahmenelemente beträgt 5m, und alle Auflager sind 6-wertig. (Siehe Abbildung 4.24)

In diesem Beispiel wird die Momentenänderung ΔM_{yy} am Stab $FE008$ an der Stelle $x = 2,5$ untersucht, wenn das Stahlprofil des Stabes $FE005$ vertauscht wird. Die exakten Änderungen sind mit ThreeDFrame bestimmt worden. Um die Näherungsformeln zu benutzen, setzen wir einen Knick an der untersuchten Stelle und errechnen wir die momentenverläufe.

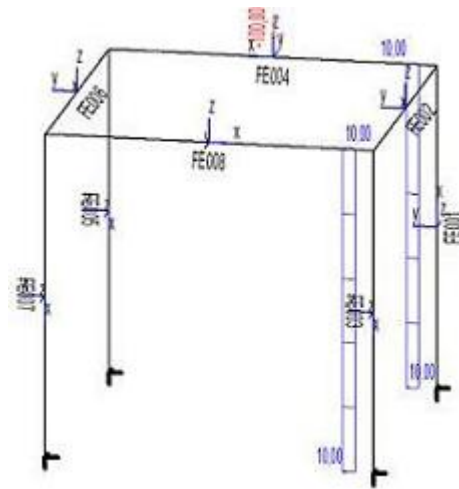
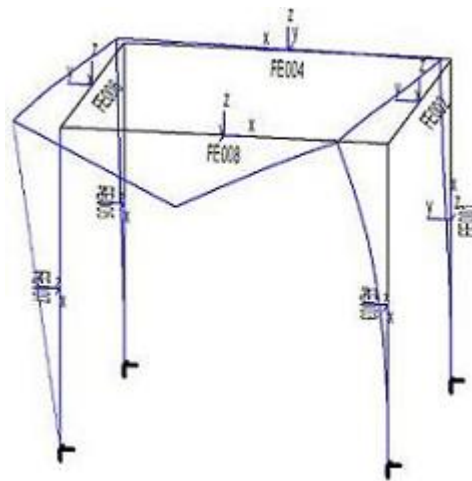


Abbildung 4.24: Einfacher 3D-Rahmen - System und Belastung

Für 3D-Systeme ist es nötig, die beiden Momente M_{yy} und M_{zz} zu überlagern, anhand der Formel wird dieser dargestellt

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI_{yy}}{EI_{yy}} \cdot \frac{M_{yy} \cdot M_{yy}^2}{EI_{yy}} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI_{zz}}{EI_{zz}} \cdot \frac{M_{zz} \cdot M_{zz}^2}{EI_{zz}} dx. \quad (4.59)$$

Abbildung 4.25: Einfacher 3D-Rahmen - Verformungsfigur aus G_2

Die Werte sind in der Tabelle 4.8 dargestellt.

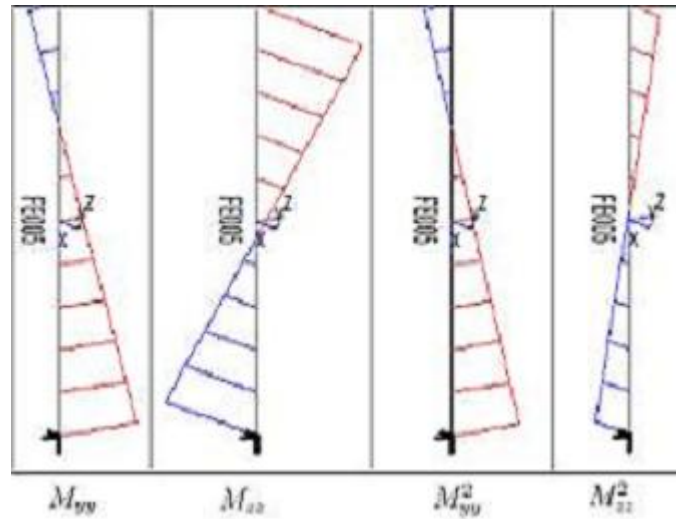


Abbildung 4.26: Einfacher 3D-Rahmen - Momentenverläufe im Stab $FE005$ aus dem Lastfall und G_2

Profil	ΔM_{yy}^{exakt}	ΔM_{yy}^1	ΔM_{yy}^2	ΔM_{yy}^3
HEA240	-2,90	-3,61(24%)	-8,24(184%)	-5,02(73%)
HEA260	-1,96	-2,69(37%)	-4,63(136%)	-3,40(74%)
HEA280	-1,03	-1,58(53%)	-2,09(103%)	-1,80(74%)
HEA320	0,44	0,77(74%)	0,68(54%)	0,72(63%)
HEA340	0,73	1,33(82%)	1,07(47%)	1,18(62%)
HEA460	1,00	1,90(90%)	1,42(42%)	1,62(62%)

Tabelle 4.8: Einfacher 3D-Rahmen - Momentenänderung ΔM_{yy} an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.

Die Werte aus der Tabelle 4.8 sind in den Diagrammen auf den Abbildung 4.27 und 4.28 dargestellt.

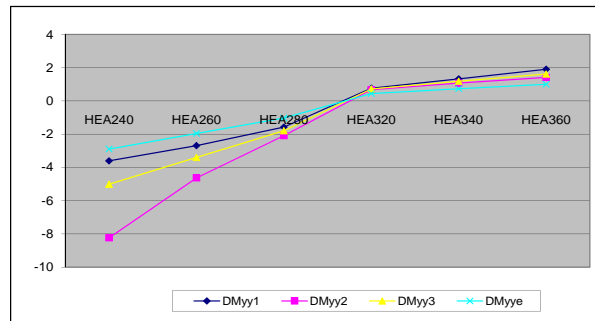


Abbildung 4.27: Einfacher 3D-Rahmen - Die Momentenänderungen ΔM_{yy} aus Tabelle 4.8.

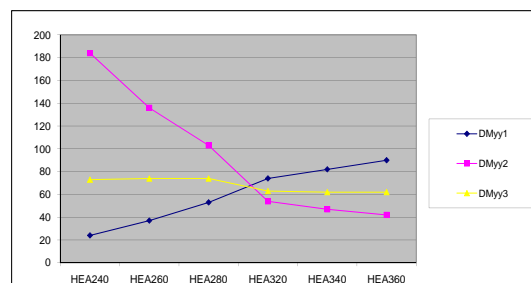


Abbildung 4.28: Einfacher 3D-Rahmen - Der Fehlerprozentsatz in den Momentenänderungen ΔM_{yy} in % aus Tabelle 4.8.

4.5 Beispiel - Zweiter 3D-Rahmen

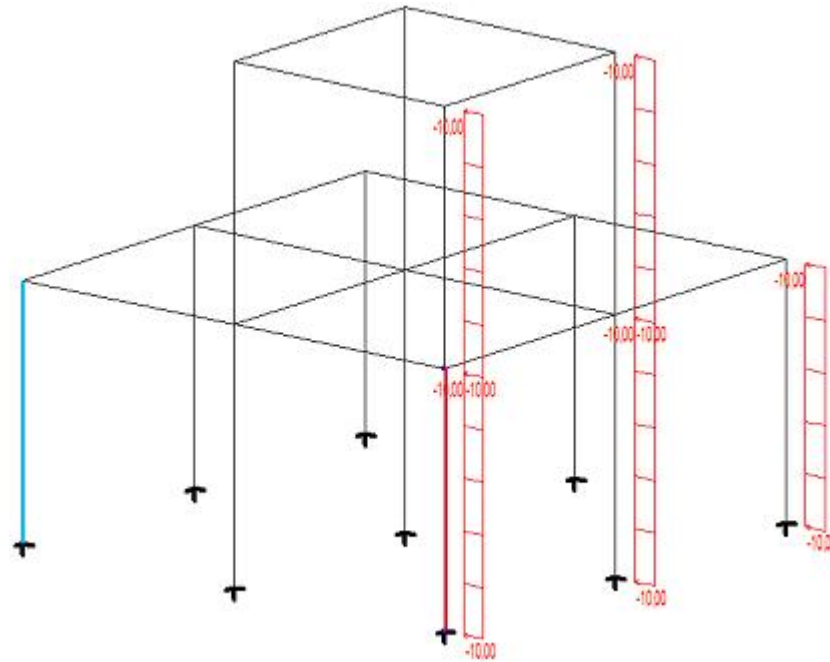
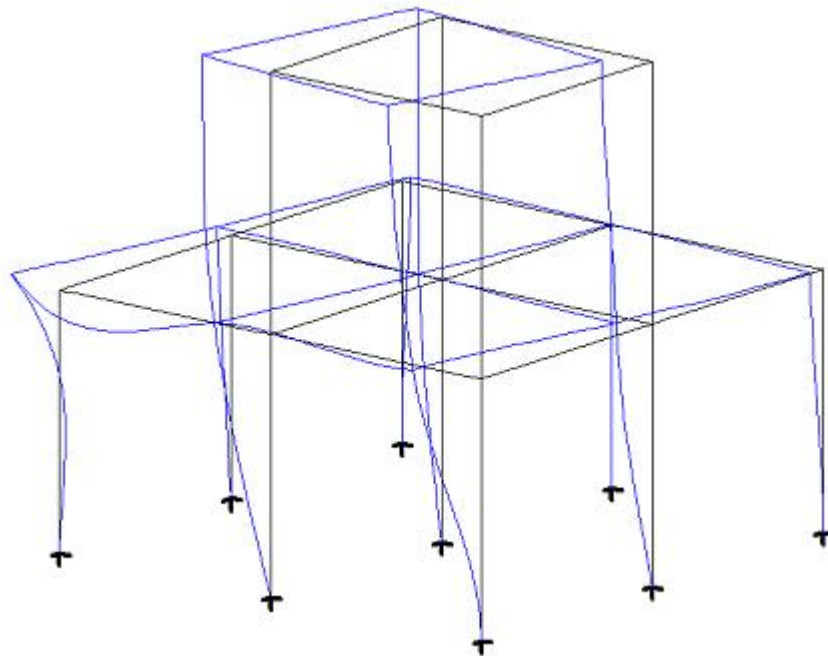
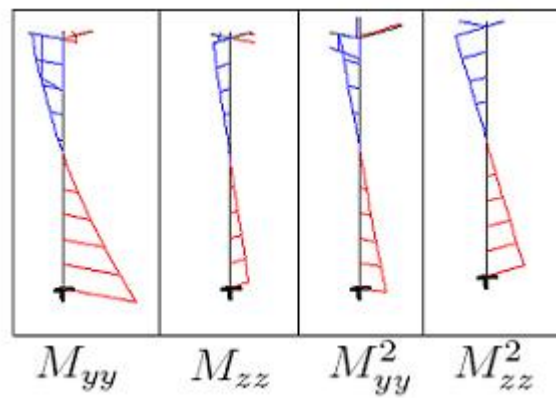


Abbildung 4.29: Zweiter 3D-Rahmen - System und Belastung.

Dieses System untersucht die Momentenänderung in dem blauen Stab, wenn die Biegesteifigkeit des roten Stabs sich ändert. Dafür wird der rote Stab mehrmals vertauscht, und die Momentenänderung am Ende des blauen Stabs mit Hilfe des EDV-Programms abgelesen. Das System besteht aus HEA300 Profilen, die miteinander biegesteif verbunden sind. Die äußeren vier Auflager sind 6-wertig, und der Rest ist gelenkig. Die Länge aller Stäbe beträgt $4m$.

Abbildung 4.30: Zweiter 3D-Rahmen - Verformungsfigur aus G_2 .Abbildung 4.31: Zweiter 3D-Rahmen - Momentenverläufe im Stab mit der Biegesteifigkeitsänderung aus dem Lastfall und G_2 .

Die Werte aus der exakten Momentendifferenz ΔM_{yy}^{exakt} und die Näherungsformeln (3.47), (3.48) und (3.49) sind in der Tabelle 4.9 aufgeführt. Sie sind grafisch in den Diagrammen auf den Abbildungen 4.32 und 4.33 dargestellt.

Profil	ΔM_{yy}^{exakt}	ΔM_{yy}^1	ΔM_{yy}^2	ΔM_{yy}^3
HEA240	-11,51	-9,55(17%)	-22,46(95%)	-13,40(16%)
HEA260	-7,66	-7,10(7%)	-12,40(62%)	-9,03(18%)
HEA280	-4,02	-4,17(4%)	-5,58(39%)	-4,77(19%)
HEA320	3,14	4,22(34%)	3,36(7%)	3,74(19%)
HEA340	5,73	8,53(49%)	5,63(2%)	6,78(18%)
HEA460	8,14	13,41(65%)	7,41(9%)	8,14(17%)

Tabelle 4.9: Zweiter 3D-Rahmen - Momentenänderung ΔM_{yy} an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.

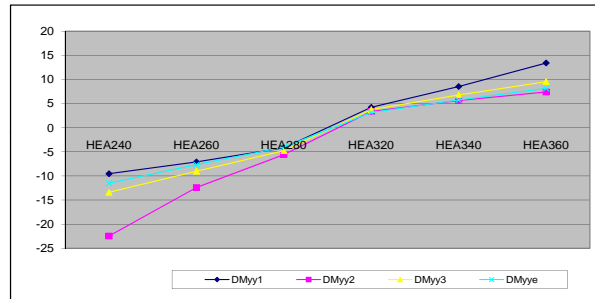


Abbildung 4.32: Zweiter 3D-Rahmen - Die Momentenänderungen ΔM_{yy} aus Tabelle 4.8.

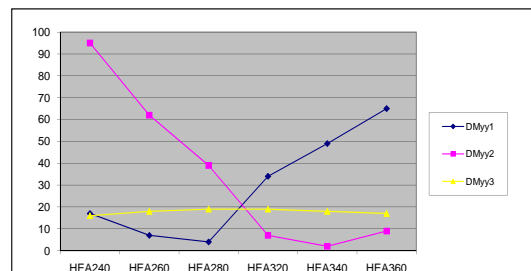


Abbildung 4.33: Zweiter 3D-Rahmen - Der Fehlerprozentatz in den Momentenänderungen ΔM_{yy} in % aus Tabelle 4.8.

4.6 Auswertung der Ergebnisse

Anhand der Beispiele lässt sich feststellen, dass die Näherungsformeln unterschiedliche Genauigkeiten liefern. Die Formel (3.49) liefert fast konstante Abweichungen für jedes System, deshalb ist sie meiner Meinung nach am besten geeignet. Die Formel (3.48) liefert bei großen Biegesteifigkeitsänderungen große Abweichungen, aber sie ist bei kleinen Biegesteifigkeits-änderungen verwendbar.

In den Rechenbeispielen wurde immer ein Profil gewechselt, d.h. es muss auch die Querschnittsänderung in der Näherungsformel mitgerechnet werden, wie es in der folgenden Formel zu sehen ist,

$$\partial^i w = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot M_i}{EI} dx + \frac{\Delta EA}{EA} \int_{x_1}^{x_2} \frac{N \cdot N_i}{EA} dx. \quad (4.60)$$

Das zweite Term wurde aber weggelassen, da der Querschnittsänderungsanteil sehr klein ist.

In Abschnitt 4.2, waren die Abweichungen sehr groß in vergleich mit den exakten Werten. Meiner Meinung nach sind die Abweichungen groß, weil wir die Schnitt. bzw. Kraftgrößen in den belasteten Elementen bestimmen wollen.

Als ein Ergebnis dieser Arbeit, habe ich festgestellt, dass ein System konstante Verläufe für die exakten und genäherten Änderungen hat, siehe die Diagramme in Abbildungen 4.9, 4.14 und 4.22, danach vergleiche mit den Diagrammen im Anhang.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit sind zuerst die Grundlagen der klassischen Statik erklärt worden. Im zweiten Kapitel werden der ‚Satz von Betti‘ und die ‚Green’schen Identitäten‘ beschrieben, danach wurden die Einflussfunktionen und ihre Erzeugung durch Aufbringen von Singularitäten erklärt. Weiterhin sind die Zusammenhänge zwischen den Einflussfunktionen und der Berechnung mit der FE-Methode dargestellt worden.

Das Hauptthema dieser Arbeit ist die ‚Sensitivitätsanalyse‘ und ihre Anwendungen an ebenen und räumlichen Rahmenstragwerken. In Kapitel 3 wurde zuerst die Näherungsformeln für die unterschiedlichen Fälle hergeleitet. In Kapitel 4 wurden diese Formeln für die Berechnung mehrerer Beispiele benutzt.

Ausgehend von dem Gleichgewicht der virtuellen inneren und äußeren Arbeiten für das unmodifizierte System

$$\delta A_i = \delta A_a,$$

wurde auch das Gleichgewicht der virtuellen Arbeiten für das modifizierte System dargestellt

$$\delta A_i^c = \delta A_a^c.$$

Da die äußere Arbeit konstant bleibt und am modifizierten System die Biegesteifigkeit geändert wurde, erhält man

$$\delta A_i^c = \int_0^l EI w_c'' v'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' v'' dx = \int_0^l p v dx = \delta A_a^c.$$

Nach mehreren Umformungsschritten bekommt man heraus, dass

$$j(e_u) = -d(u, G)$$

ist. Das ist die Hauptformel für die Sensitivitätsanalyse und ihre Anwendungen an Balken, Auflagern, Platten und Scheiben. Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Rahmenstragwerke mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse durchgerechnet. Diese Formulierung lässt es zu, die Steifigkeitsänderung zu betrachten, wenn man nur in dem Bereich integriert, wo die Steifigkeitsänderung stattgefunden hat. Diese Methode ist besser als der Satz von Betti, mit dem man über das gesamte System integrieren muss.

Die Abweichungen zwischen den exakten Werten und den genäherten Formeln war nicht groß genug, um die Genauigkeit dieser Formeln unter Betrachtung zu stellen. Das Problem bei kleinen Differenzen $\Delta \partial^i w$ war, dass der Fehlerprozentsatz ziemlich groß war, obwohl die Beträge sehr nah aneinander lagen.

Ein guter Statiker kann die Schwachstellen einer Struktur sofort mit den Augen wahrnehmen. Das kann ein EDV-Programm noch nicht. Mit dieser neuen Formulierung der Sensitivitätsanalyse kann eine neue Generation von Programmen erschafft werden, die diese Schwachstellen wahrnehmen können.

Diese erhoffte neue Generation von Programmen, kann die Beeinflussung der Biegesteifigkeitsänderung wie folgend betrachten:

Bekommt das Programm ein System zur Berechnung, findet das Programm erst eine Stelle x , wo das Moment oder die Querkraft ihren Maximalen Wert

haben, danach rechnet das Programm die Einflussfunktionen dieser Größen. Darüber hinaus studiert das Programm, wie die Änderung die Biegesteifigkeiten der Struktur die Einflussfunktionen beeinflusst, und damit auch die maximalen Werte für $M(x)$ und $V(x)$. Dasselbe gilt auch für die Änderung der Lagersteifigkeit.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ermittlung der Durchbiegung an einem gelenkig gelagerten Balken auf starren Lagern mittels Einflussfunktion.	8
2.2	Alle möglichen Biegelinien, die ein FE-Programm darstellen kann, liegen in der endlichen dimensional V_h , die in V liegt.	10
2.3	Oben: Die äquivalenten Knotenkräfte für die FE-Querkraft in der Balkenmitte. Unten: Rot zeigt die exakte Lösung, blau die FE-Lösung.	14
3.4	Durchlaufträger - Biegesteifigkeitsänderung in einem bestimmten Bereich; a) Durchlaufträger unter Streckenlast, b) Momentenverlauf aus der Streckenlast, c) Einflussfunktion für das Moment in der Mitte des zweiten Feldes und d) Momente aus der Einflussfunktion	22
3.5	Einflussfunktionen für a) Die Durchbiegung w , b) die Verdrehung w_x , c) das Biegemoment m_{xx} und d) die Querkraft q_x im Mittelpunkt einer gelenkig gelagerten Platte. Aus [4]	26
4.6	Stockwerksrahmen - System und Belastung	28
4.7	Stockwerksrahmen - Momentenverlauf aus der Windlast	29
4.8	Stockwerksrahmen - Links: Verformungsfigur, Rechts: Momentenverlauf aus G_2 in der oberen rechten Ecke.	30
4.9	Stockwerksrahmen - Die Momentenänderungen aus Tabelle 4.4.	31
4.10	Stockwerksrahmen - Der Fehlerprozentsatz in den Momentenänderungen in % aus Tabelle 4.4.	31
4.11	Vierendeelträger - System und Belastung.	32
4.12	Vierendeelträger - Momentenverlauf aus dem Eigengewicht.	33

4.13 Vierendeelträger - **Oben:** Momentenverlauf, **Unten:** Verformungsfigur aus G_3 in der untersuchten Stelle. 33

4.14 Vierendeelträger - Die Querkraftsänderungen aus Tabelle 4.5. 34

4.15 Vierendeelträger - Der Fehlerprozensatz in den Querkraftsänderungen in % aus Tabelle 4.5. 35

4.16 Vierendeelträger - Einzellast und Auflagerkräfte aus G_0 , Im Grün ist die Verformungsfigur. 35

4.17 Durchbiegungsänderung 36

4.18 Fehlerprozensatz 36

4.19 Mehrfeldbrücke - System und Belastung 37

4.20 Mehrfeldbrücke - Momentenverläufe aus dem Lastfall. 38

4.21 Mehrfeldbrücke - Momentenverläufe aus G_2 , im Grün ist die Verformungsfigur. 38

4.22 Mehrfeldbrücke - Die Momentenänderungen aus Tabelle 4.7. 39

4.23 Mehrfeldbrücke - Der Fehlerprozensatz in den Momentenänderungen in % aus Tabelle 4.7. 40

4.24 Einfacher 3D-Rahmen - System und Belastung 41

4.25 Einfacher 3D-Rahmen - Verformungsfigur aus G_2 41

4.26 Einfacher 3D-Rahmen - Momentenverläufe im Stab $FE005$ aus dem Lastfall und G_2 42

4.27 Einfacher 3D-Rahmen - Die Momentenänderungen ΔM_{yy} aus Tabelle 4.8. 43

4.28 Einfacher 3D-Rahmen - Der Fehlerprozensatz in den Momentenänderungen ΔM_{yy} in % aus Tabelle 4.8. 43

4.29 Zweiter 3D-Rahmen - System und Belastung. 44

<i>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</i>	54
4.30 Zweiter 3D-Rahmen - Verformungsfigur aus G_2	45
4.31 Zweiter 3D-Rahmen - Momentenverläufe im Stab mit der Biegesteifigkeitsänderung aus dem Lastfall und G_2	45
4.32 Zweiter 3D-Rahmen - Die Momentenänderungen ΔM_{yy} aus Tabelle 4.8.	46
4.33 Zweiter 3D-Rahmen - Der Fehlerprozentsatz in den Momentenänderungen ΔM_{yy} in % aus Tabelle 4.8.	47

Tabellenverzeichnis

2.1	Zusammenfassung der Green'schen Identitäten.	6
2.2	Duale Größen zur Berechnung von Einflussfunktionen am Balken und der schubstarren Platte aus [1] S. 17.	6
3.3	Änderung der Momente an der Stelle $x = 6, 5$, ermittelt Durch die Formeln (3.47),(3.48) und (3.49). In Klammern sind die Abweichungen vom exakten Ergebnis in % dargestellt.	23
4.4	Stockwerksrahmen - Momentenänderung an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	30
4.5	Vierendeelträger - Querkraftänderung in der untersuchten Stelle, In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	34
4.6	Vierendeelträger - Durchbiegungänderung in der untersuchten Stelle, In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	36
4.7	Mehrfeldbrücke - Momentenänderung an der untersuchten Stelle, In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	39
4.8	Einfacher 3D-Rahmen - Momentenänderung ΔM_{yy} an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	42
4.9	Zweiter 3D-Rahmen - Momentenänderung ΔM_{yy} an der untersuchten Stelle. In Klammern sind die Fehlerprozentsätze in %.	46

Literaturverzeichnis

- [1] Carl, O. (2004): *Diplomarbeit 2: Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen*, Universität Kassel.
- [2] Grätsch, T., (2002): *L₂-Statik*. Dissertation Universität Kassel.
- [3] Hartmann, F. (1985): *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*, Springerverlag, Berlin.
- [4] Hartmann, F., Katz, C. (2007): *Structural Analysis with Finite Elements*, Springerverlag, Berlin, 2. Auflage.
- [5] Link, M., (2002): *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*, Teubnerverlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 3. Auflage.
- [6] Meskouris, K., Hake, E. (1999): *Statik der Stabtragwerke*, Einführung in die Tragwerkslehre, Springerverlag, Berlin.
- [7] Werckle, H., (2008): *Finite Elemente in der Baustatik*, Viewegverlag, Wiesbaden, 3. auflage.

A Statische Systeme

In diesem Anhang befindet sich die Ausdrücke aus den EDV-Programmen ‚TwoDFrame‘ und ‚ThreeDFrame‘. Diese Ausdrücke geben informationen über die Statische Systeme, die Elemente, die Auflager, Die Material und die Querschnitte.

TwoDFrame R 1.82 - Copyright(C) 2002-09 Ralf Martin Hansen

Hochschulversion für die NICHTKOMMERZIELLE Nutzung.

Position: system1last

Eingabedatei: C:\Users\waleed\Desktop\2D\Stockwerksrahmen\system1last.2df	Standardmaterialien: C:\twdf\material\material.txt
Ausgabedatei: C:\Users\waleed\Desktop\2D\Stockwerksrahmen\system1last.htm	Standardquerschnitte: C:\twdf\section\section.txt
Stahlbetonbemessungsdaten: C:\twdf\section\rconcr.txt	
Statische Berechnung eines Systems mit 17 Knoten, 22 Stabelementen, 12 starren Randbedingungen, 39 Freiheitsgraden, 5 Lastfällen, 0 Lastfallkombinationen. Grad der statischen Unbestimmtheit: 27. Berechnungszeit: 0.152 sec.	
Theorie I. Ordnung. Ohne Schubverformung.	

Statisches System:

Knoten:	x [m]	z [m]	Auflagerbedingungen: -1 = Eingespanntes Auflager, 0 = Frei, >0 = Federsteifigkeit			
			X [kN/m]	Z [kN/m]	YY [kNm]	Winkel [°]
N01	0.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	0.000
N02	0.000	5.000	0.000	0.000	0.000	
N03	0.000	10.000	0.000	0.000	0.000	
N04	0.000	15.000	0.000	0.000	0.000	
N05	5.000	5.000	0.000	0.000	0.000	
N06	5.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	0.000
N07	5.000	10.000	0.000	0.000	0.000	
N08	5.000	15.000	0.000	0.000	0.000	
N09	10.000	5.000	0.000	0.000	0.000	
N010	10.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	0.000
N011	10.000	10.000	0.000	0.000	0.000	
N012	10.000	15.000	0.000	0.000	0.000	
N013	15.000	5.000	0.000	0.000	0.000	
N014	15.000	10.000	0.000	0.000	0.000	
N015	15.000	15.000	0.000	0.000	0.000	
N016	15.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	0.000
N017	5.500	15.000	0.000	0.000	0.000	

Stabelemente:	Anfangsknoten	Endknoten	Querschnitt	Material	Gelenk = 0, Steif = 1.00 = 100%					
					M1	M2	V1	V2	N1	N2
FE01	N01	N02	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE02	N02	N03	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE03	N03	N04	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE04	N02	N05	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE05	N05	N06	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE06	N05	N07	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE07	N07	N08	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE08	N05	N09	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE09	N09	N010	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE010	N09	N011	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE011	N011	N012	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE012	N03	N07	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE013	N07	N011	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE014	N04	N08	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE016	N09	N013	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE017	N011	N014	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE018	N012	N015	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE019	N015	N014	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE020	N014	N013	HEA 260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

FE021	N013	N016	HEA	260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE015	N08	N017	HEA	260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE022	N017	N012	HEA	260	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Stahlquerschnitte:		Höhe Breite	Steg- /Flansch- dicke	Radius	Querschnitts- fläche	Schub- fläche	Flächen- moment	Flächenmoment 2ten Grades	Trägheits- halbmesser	Schwerpkt.- abstand	
		h b [mm]	s t [mm]	r ₁ r ₂ [mm]	A _x [cm ²]	A _{vy} A _{vz} [cm ²]	S _{yy} S _{zz} [cm ³]	I _{yy} I _{zz} [cm ⁴]	i _{yy} i _{zz} [cm]	z _s y _s [mm]	h/s b/t
HEA	260	250.00 260.00	7.50 12.50	24.00	86.82	58.06 28.76	459.89 215.08	10454.94 3667.56	10.97 6.50	125.00 130.00	23.60 8.18
HEA	200	190.00 200.00	6.50 10.00	18.00	53.83	35.75 18.08	214.74 101.91	3692.15 1335.51	8.28 4.98	95.00 100.00	20.62 7.88
HEA	180	171.00 180.00	6.00 9.50	15.00	45.25	30.78 14.47	162.43 78.25	2510.28 924.60	7.45 4.52	85.50 90.00	20.33 7.58
HEA	280	270.00 280.00	8.00 13.00	24.00	97.26	65.52 31.74	556.11 259.07	13673.28 4762.64	11.86 7.00	135.00 140.00	24.50 8.62
HEA	220	210.00 220.00	7.00 11.00	18.00	64.34	43.67 20.67	284.23 135.30	5409.69 1954.56	9.17 5.51	105.00 110.00	21.71 8.05
HEA	240	230.00 240.00	7.50 12.00	21.00	76.84	51.66 25.18	372.31 175.85	7763.17 2768.81	10.05 6.00	115.00 120.00	21.87 7.94
HEA	300	290.00 300.00	8.50 14.00	27.00	112.53	75.25 37.28	691.64 320.58	18263.47 6309.55	12.74 7.49	145.00 150.00	24.47 8.48

Materialien:	Elastizitäts- modul	Schub- modul	Ausdehnungs- koeffizient	Quer- dehnzahl	Masse	Festigkeit [MN/m ²]				
	E [kN/m ²]	G [kN/m ²]	AlphaT [1/K]	nue	kg/m ³	f _{yk} ; f _{mk}	f _{vk}	f _{tk}	f _{ck}	
S235JRG2(RSt37-2)	2.1e+008	8.1e+007	1.2e-005	0.30	7850.0	240.00	138.56			

TwoDFrame R 1.82 - Copyright(C) 2002-09 Ralf Martin Hansen

Hochschulversion für die NICHTKOMMERZIELLE Nutzung.

Position: System2

Statisches System:

Knoten:	x	z	Auflagerbedingungen: -1 = Eingespanntes Auflager, 0 = Frei, >0 = Federsteifigkeit			
	[m]	[m]	X [kN/m]	Z [kN/m]	YY [kNm]	Winkel [°]
N01	0.000	0.000	2000.000	2000.000	0.000	0.000
N02	4.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
N03	8.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
N04	12.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
N05	16.000	0.000	0.000	2000.000	0.000	0.000
N06	0.000	3.000	0.000	0.000	0.000	
N07	4.000	3.000	0.000	0.000	0.000	
N08	8.000	3.000	0.000	0.000	0.000	
N09	12.000	3.000	0.000	0.000	0.000	
N010	16.000	3.000	0.000	0.000	0.000	

Stabelemente:	Anfangsknoten	Endknoten	Querschnitt	Material	Gelenk = 0, Steif = 1.00 = 100%						
					M1	M2	V1	V2	N1	N2	
FE01	N01	N02	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE02	N02	N03	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE03	N03	N04	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE04	N04	N05	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE05	N01	N06	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE06	N02	N07	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE07	N03	N08	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE08	N04	N09	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE010	N06	N07	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE011	N07	N08	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE012	N08	N09	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE013	N09	N010	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE09	N010	N05	IPE 300	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Stahlquerschnitte:	Höhe Breite	Steg- /Flansch- dicke	Radius	Querschnitts- fläche	Schub- fläche	Flächen- moment	Flächenmoment 2ten Grades	Trägheits- halbmesser	Schwerpkt.- abstand		
	h b [mm]	s t [mm]	r ₁ r ₂ [mm]	A _x [cm ²]	A _{Vy} A _{Vz} [cm ²]	S _{yy} S _{zz} [cm ³]	I _{yy} I _{zz} [cm ⁴]	i _{yy} i _{zz} [cm]	z _s y _s [mm]	h/s b/t	
IPE	300	300.00 150.00	7.10 10.70	15.00	53.81	28.13 25.68	314.18 62.61	8356.10 603.78	12.46 3.35	150.00 75.00	35.01 5.28
IPE	240	240.00 120.00	6.20 9.80	15.00	39.12	19.97 19.14	183.32 36.96	3891.62 283.63	9.97 2.69	120.00 60.00	30.71 4.28
IPE	270	270.00 135.00	6.60 10.20	15.00	45.95	23.81 22.14	242.00 48.48	5789.78 419.87	11.23 3.02	135.00 67.50	33.27 4.82
IPE	330	330.00 160.00	7.50 11.50	18.00	62.61	31.80 30.81	402.17 76.84	11766.89 788.14	13.71 3.55	165.00 80.00	36.13 5.07
IPE	360	360.00 170.00	8.00 12.70	18.00	72.73	37.59 35.14	509.57 95.55	16265.62 1043.45	14.95 3.79	180.00 85.00	37.32 4.96
IPE	220	220.00 110.00	5.90 9.20	12.00	33.37	17.49 15.88	142.70 29.06	2771.84 204.89	9.11 2.48	110.00 55.00	30.10 4.35

Materialien:	Elastizitäts- modul	Schub- modul	Ausdehnungs- koeffizient	Quer- dehnzahl	Masse	Festigkeit [MN/m ²]				
	E [kN/m ²]	G [kN/m ²]	AlphaT [1/K]	nue	kg/m ³	f _{yk} ; f _{mk}	f _{vk}	f _{tk}	f _{ck}	
S235JRG2(RSt37-2)	2.1e+008	8.1e+007	1.2e-005	0.30	7850.0	240.00	138.56			

TwoDFrame R 1.82 - Copyright(C) 2002-09 Ralf Martin Hansen

Hochschulversion für die NICHTKOMMERZIELLE Nutzung.

Position: system3

Statisches System:

Knoten:	x	z	Auflagerbedingungen: -1 = Eingespanntes Auflager, 0 = Frei, >0 = Federsteifigkeit			
	[m]	[m]	X [kN/m]	Z [kN/m]	YY [kNm]	Winkel [°]
N01	0.000	4.000	-1.000	1000.000	0.000	0.000
N02	4.000	4.000	0.000	0.000	0.000	
N03	9.000	4.000	0.000	0.000	0.000	
N04	14.000	4.000	0.000	0.000	0.000	
N05	18.000	4.000	0.000	-1.000	0.000	0.000
N06	4.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	0.000
N07	9.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000	0.000
N08	14.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000	0.000

Stabelemente:	Anfangsknoten	Endknoten	Querschnitt	Material	Gelenk = 0, Steif = 1.00 = 100%					
					M1	M2	V1	V2	N1	N2
FE01	N01	N02	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE02	N02	N03	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE03	N03	N04	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE04	N04	N05	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE05	N06	N02	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE06	N07	N03	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
FE07	N08	N04	HEA 360	S235JRG2(RSt37-2)	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Stahlquerschnitte:	Höhe Breite	Steg- /Flansch- dicke	Radius	Querschnitts- fläche	Schub- fläche	Flächen- moment	Flächenmoment 2ten Grades	Trägheits- halbmesser	Schwerpkt.- abstand	h/s b/t	
											h b [mm]
HEA	360	350.00 300.00	10.00 17.50	27.00	142.76	93.80 48.96	1044.24 401.14	33089.75 7886.84	15.22 7.43	175.00 150.00	26.10 6.74
HEA	320	310.00 300.00	9.00 15.50	27.00	124.37	83.23 41.13	814.04 354.87	22928.56 6985.23	13.58 7.49	155.00 150.00	25.00 7.65
HEA	340	330.00 300.00	9.50 16.50	27.00	133.47	88.52 44.95	925.24 377.97	27693.07 7435.99	14.40 7.46	165.00 150.00	25.58 7.17
HEA	400	390.00 300.00	11.00 19.00	27.00	158.98	101.65 57.33	1280.90 436.43	45069.35 8563.82	16.84 7.34	195.00 150.00	27.09 6.18
HEA	450	440.00 300.00	11.50 21.00	27.00	178.03	112.25 65.78	1607.93 482.77	63721.58 9465.32	18.92 7.29	220.00 150.00	29.91 5.58

Materialien:	Elastizitäts- modul	Schub- modul	Ausdehnungs- koeffizient	Quer- dehnzahl	Masse	Festigkeit [MN/m ²]			
	E [kN/m ²]	G [kN/m ²]	AlphaT [1/K]	nue		f _{yk} ; f _{mk}	f _{vk}	f _{tk}	f _{ck}
S235JRG2(RSt37-2)	2.1e+008	8.1e+007	1.2e-005	0.30	7850.0	240.00	138.56		

ThreeDFrame / ThreeDFEM R 1.25 - Copyright(C) 2004-07 Ralf Martin Hansen. Lizenziert für Friedel Hartmann.

AKADEMIKERVERSION mit voller Funktionalität für die NICHTKOMMERZIELLE Nutzung.

Position: system1

Statisches System:

Knoten:	x	y	z	Auflagerbedingungen: -1 = Eingespanntes Auflager, 0 = Frei, >0 = Federsteifigkeit					
	[m]	[m]	[m]	X [kN/m]	Y [kN/m]	Z [kN/m]	XX [kNm]	YY [kNm]	ZZ [kNm]
N001	0.000	0.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N002	0.000	0.000	5.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N003	5.000	0.000	5.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N004	5.000	0.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N005	0.000	5.000	5.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N006	0.000	5.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N007	5.000	5.000	5.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N008	5.000	5.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00

Stabelemente:	Anfangsknoten	Endknoten	Querschnitt	Material	phixx	Gelenk = 0, Steif = 1.00 = 100%											
						o	N1	N2	Vy1	Vy2	Vz1	Vz2	Mxx1	Mxx2	Myy1	Myy2	Mzz1
FE001	N001	N002	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE002	N002	N003	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE003	N003	N004	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE004	N002	N005	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE005	N005	N006	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE006	N005	N007	HEA 240	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE007	N007	N008	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
FE008	N007	N003	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Stahlquerschnitte:	Hohe	Steg-	radius	Querschnitts-	Scher-	Flö-	Torsionsflö-	Flö-	Flö-	Trö-	
	Breite	/Flansch-									
	h	s	r	Ax	Avy	Syy	lx	ly	lz	iy	h/s
	b	t		[cm²]	Avz	Szz	[cm⁴]	[cm⁴]	[cm⁴]	iz	b/t
	[mm]	[mm]	[mm]		[cm²]	[cm³]				[cm]	
HEA	300	290.00	8.50	112.53	90.26	691.64	85.17	18263.47	6309.55	12.74	24.47
		300.00	14.00		37.28	320.58				7.49	8.48
HEA	280	270.00	8.00	97.26	77.74	556.11	62.10	13673.28	4762.64	11.86	24.50
		280.00	13.00		31.74	259.07				7.00	8.62
HEA	260	250.00	7.50	86.82	69.94	459.89	52.37	10454.94	3667.56	10.97	23.60
		260.00	12.50		28.76	215.08				6.50	8.18
HEA	320	310.00	9.00	124.37	99.26	814.04	107.97	22928.56	6985.23	13.58	25.00
		300.00	15.50		41.13	354.87				7.49	7.65
HEA	340	330.00	9.50	133.47	105.26	925.24	127.20	27693.07	7435.99	14.40	25.58
		300.00	16.50		44.95	377.97				7.46	7.17
HEA	360	350.00	10.00	142.76	111.26	1044.24	148.82	33089.75	7886.84	15.22	26.10
		300.00	17.50		48.96	401.14				7.43	6.74
HEA	240	230.00	7.50	76.84	61.39	372.31	41.55	7763.17	2768.81	10.05	21.87
		240.00	12.00		25.18	175.85				6.00	7.94

Materialien:	Elastizitäts-	Scher-	Ausdehnungs-	Quer-	Masse	Festigkeit			
	modul	modul	koeffizient	dehnzahl		[MN/m²]			
	E [kN/m²]	G [kN/m²]	AlphaT [1/K]	nue	kg/m³	fyk ; fmk	fvk	ftk	fck
S235JRG2(RSt37-2)	2.1e+008	8.1e+007	1.2e-005	0.3	7850	240	138.56		

ThreeDFrame / ThreeDFEM R 1.25 - Copyright(C) 2004-07 Ralf Martin Hansen. Lizenziert für Friedel Hartmann.

AKADEMIKERVERSION mit voller Funktionalität für die NICHTKOMMERZIELLE Nutzung.

Position: System2

Statisches System:

Knoten:	x	y	z	Auflagerbedingungen: -1 = Eingespanntes Auflager, 0 = Frei, >0 = Federsteifigkeit					
	[m]	[m]	[m]	X [kN/m]	Y [kN/m]	Z [kN/m]	XX [kNm]	YY [kNm]	ZZ [kNm]
N001	0.000	0.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N002	0.000	0.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N003	0.000	0.000	8.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N004	0.000	4.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
N005	0.000	4.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N007	0.000	8.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N008	0.000	8.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N009	4.000	0.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
N010	4.000	0.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N011	4.000	0.000	8.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N012	8.000	0.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N013	8.000	0.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N015	4.000	4.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N016	4.000	4.000	8.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N017	4.000	8.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
N018	4.000	8.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N019	8.000	4.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
N020	8.000	4.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N021	8.000	8.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
N022	8.000	8.000	4.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N006	0.000	4.000	8.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N014	4.000	4.000	0.000	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00

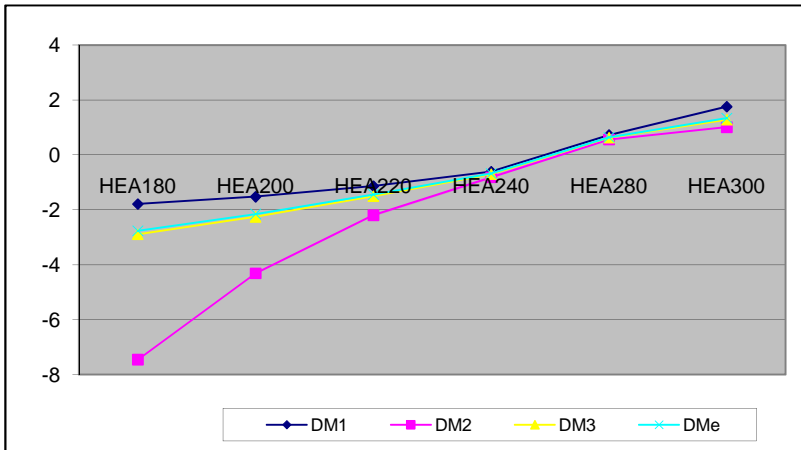
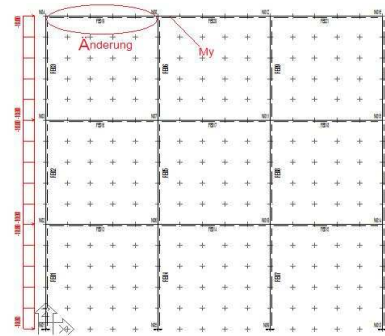
Stabelemente:	Anfangsknoten	Endknoten	Querschnitt	Material	phixx	Gelenk = 0, Steif = 1.00 = 100%											
						°	N1	N2	Vy1	Vy2	Vz1	Vz2	Mxx1	Mxx2	Myy1	Myy2	Mzz1
FE001	N001	N002	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE002	N002	N003	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE003	N004	N005	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE005	N007	N008	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE006	N009	N010	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE007	N010	N011	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE008	N012	N013	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE010	N015	N016	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE011	N017	N018	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE012	N019	N020	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE013	N021	N022	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE014	N002	N005	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE004	N005	N006	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE015	N005	N008	HEA 300	S235JRG2 (RSt37-2)	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
FE016	N008	N018	HEA 300	S235JRG2	0.00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

B Stockwerksrahmen

2. **Untersuchung:** Die Momentenänderung an der gezeigten Stelle, wenn das Element FE014 umgetauscht wird.
3. **Untersuchung:** Die Querkraftsänderung im Element FE016 an der Stelle $x = 2,5$, wenn das Element FE021 gewechselt wird. Dann wird untersucht für den Fall, dass die Elemente FE021 und FE09 gewechselt werden.
4. **Untersuchung:** Die Momentenänderung an der oberen linken Ecke wird untersucht, wenn das Element FE021 umgetauscht wird.
5. **Untersuchung:** Der selbe Fall wie in der 1. Untersuchung, aber hier wird das Anteil der Querschnittsänderung mitbeobachtet.

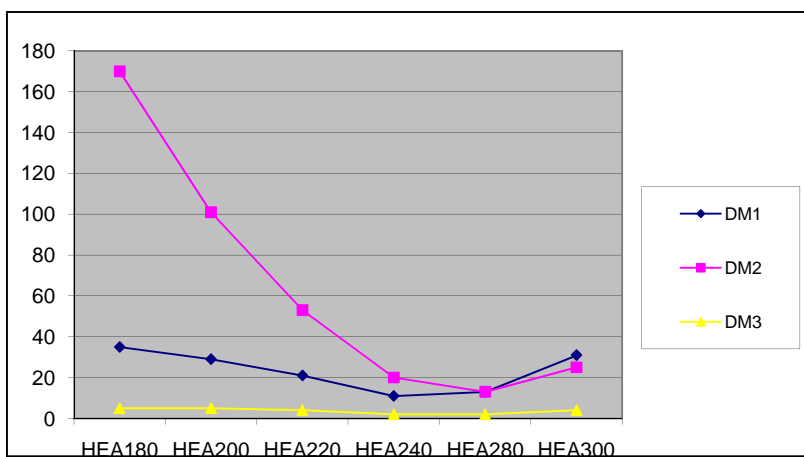
2. Untersuchung

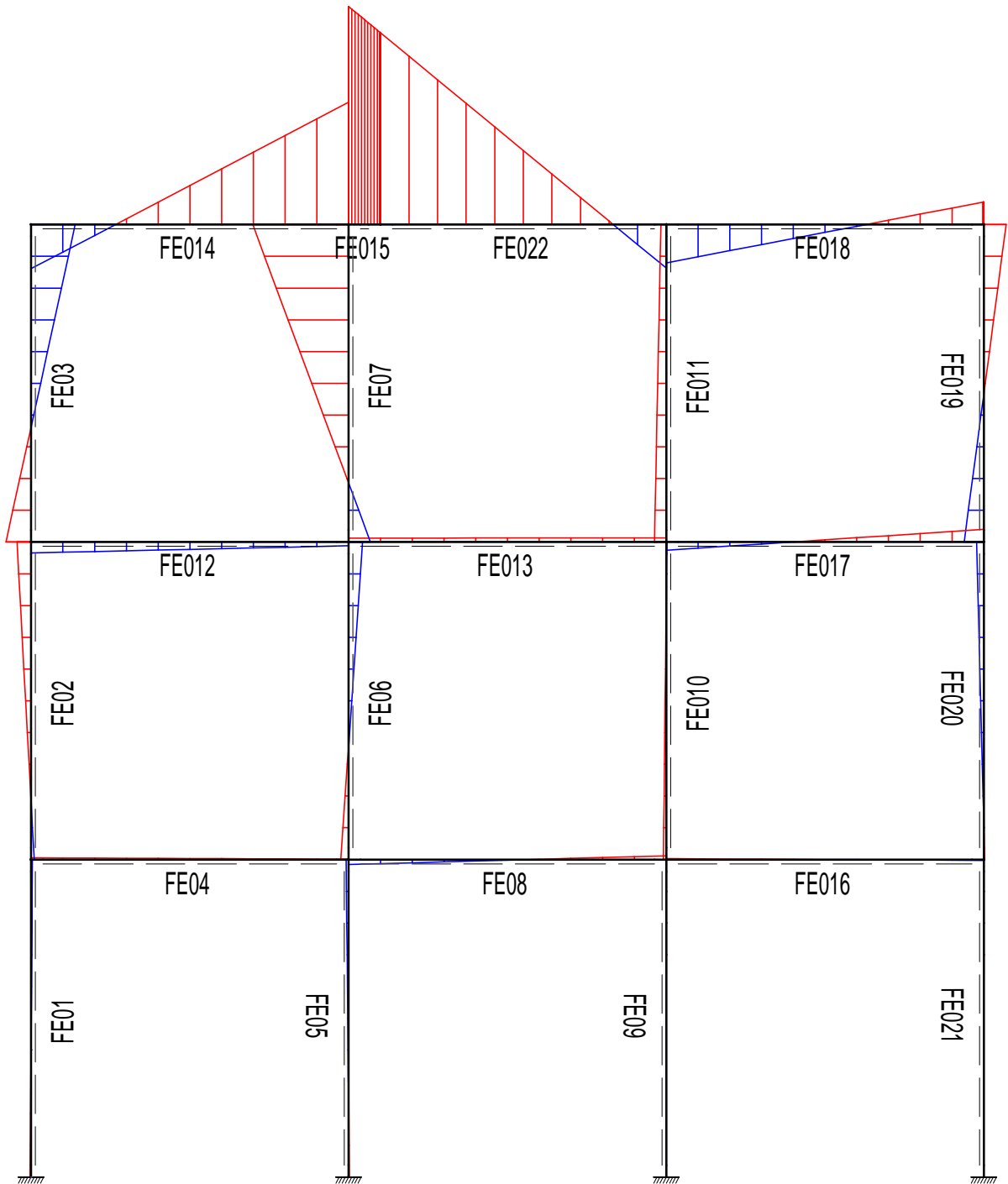
	ΔEI	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$	ΔMe
HEA180	-16683.7860	-1.79	-7.46	-2.89	-2.76
HEA200	-14201.8590	-1.52	-4.32	-2.25	-2.15
HEA220	-10595.0250	-1.14	-2.20	-1.50	-1.44
HEA240	-5652.7170	-0.61	-0.82	-0.70	-0.68
HEA280	6758.5140	0.73	0.55	0.63	0.64
HEA300	16397.9130	1.76	1.01	1.28	1.34



Fehlerprozentsatz

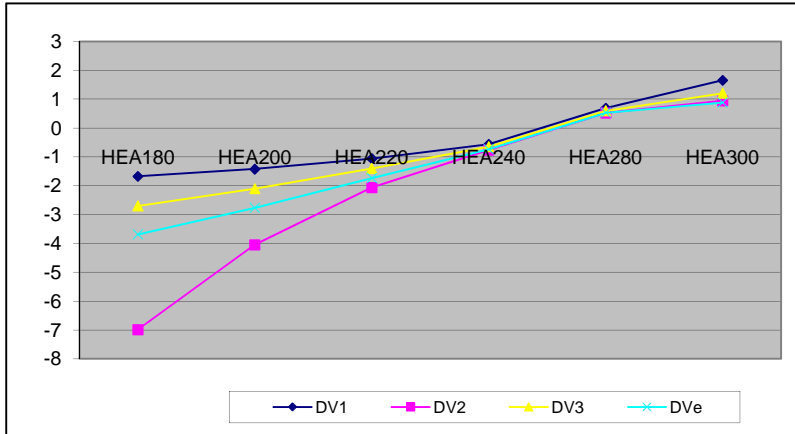
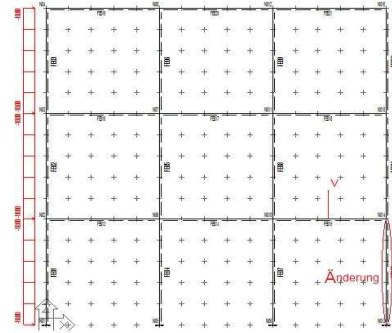
	ΔMe	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$
HEA180	-2.76	35%	170%	5%
HEA200	-2.15	29%	101%	5%
HEA220	-1.44	21%	53%	4%
HEA240	-0.68	11%	20%	2%
HEA280	0.64	13%	13%	2%
HEA300	1.34	31%	25%	4%



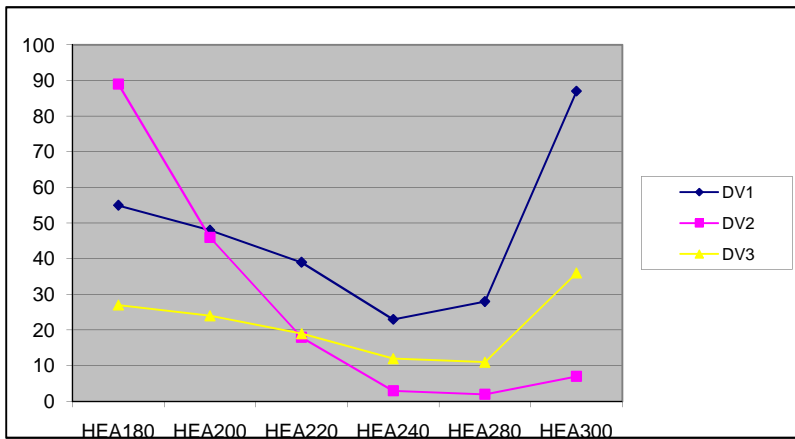


3. Untersuchung, Fall A

	ΔEI	$\Delta V1$	$\Delta V2$	$\Delta V3$	ΔVe
HEA180	-16683.7860	-1.68	-6.99	-2.71	-3.69
HEA200	-14201.8590	-1.43	-4.05	-2.11	-2.77
HEA220	-10595.0250	-1.07	-2.06	-1.40	-1.74
HEA240	-5652.7170	-0.57	-0.77	-0.65	-0.74
HEA280	6758.5140	0.68	0.52	0.59	0.53
HEA300	16397.9130	1.65	0.94	1.20	0.88

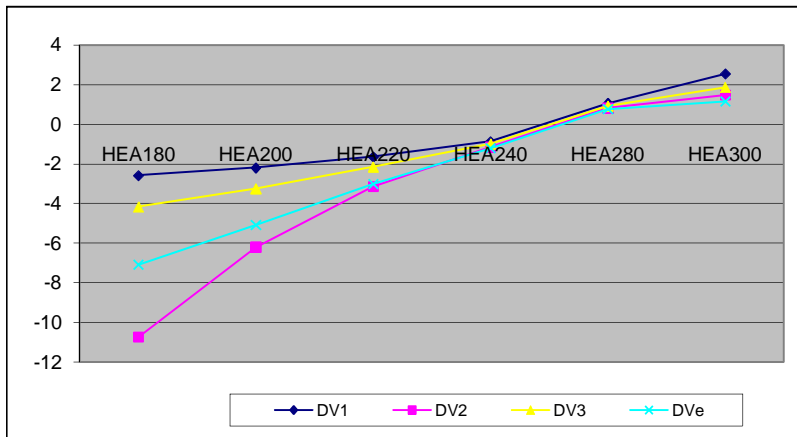
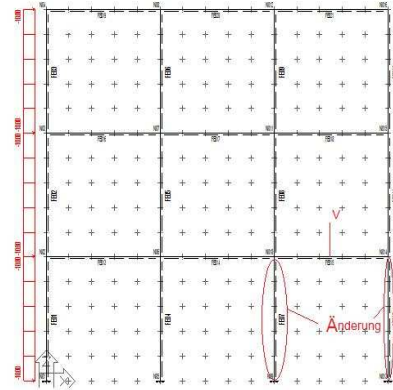


	ΔVe	$\Delta V1$	$\Delta V2$	$\Delta V3$
HEA180	-3.69	55%	89%	27%
HEA200	-2.77	48%	46%	24%
HEA220	-1.74	39%	18%	19%
HEA240	-0.74	23%	3%	12%
HEA280	0.53	28%	2%	11%
HEA300	0.88	87%	7%	36%

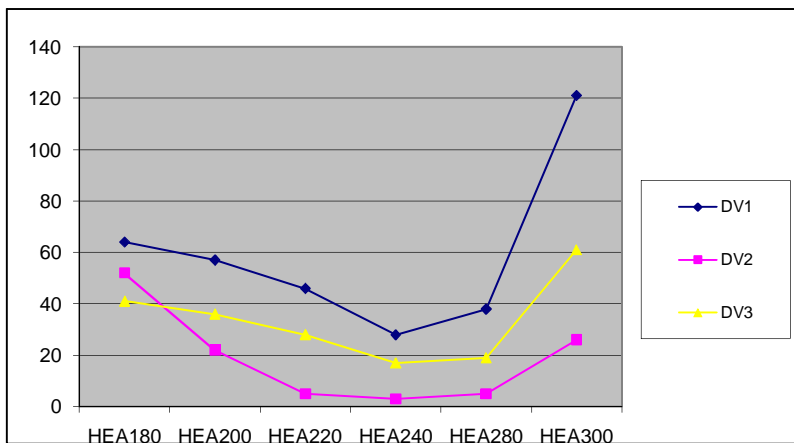


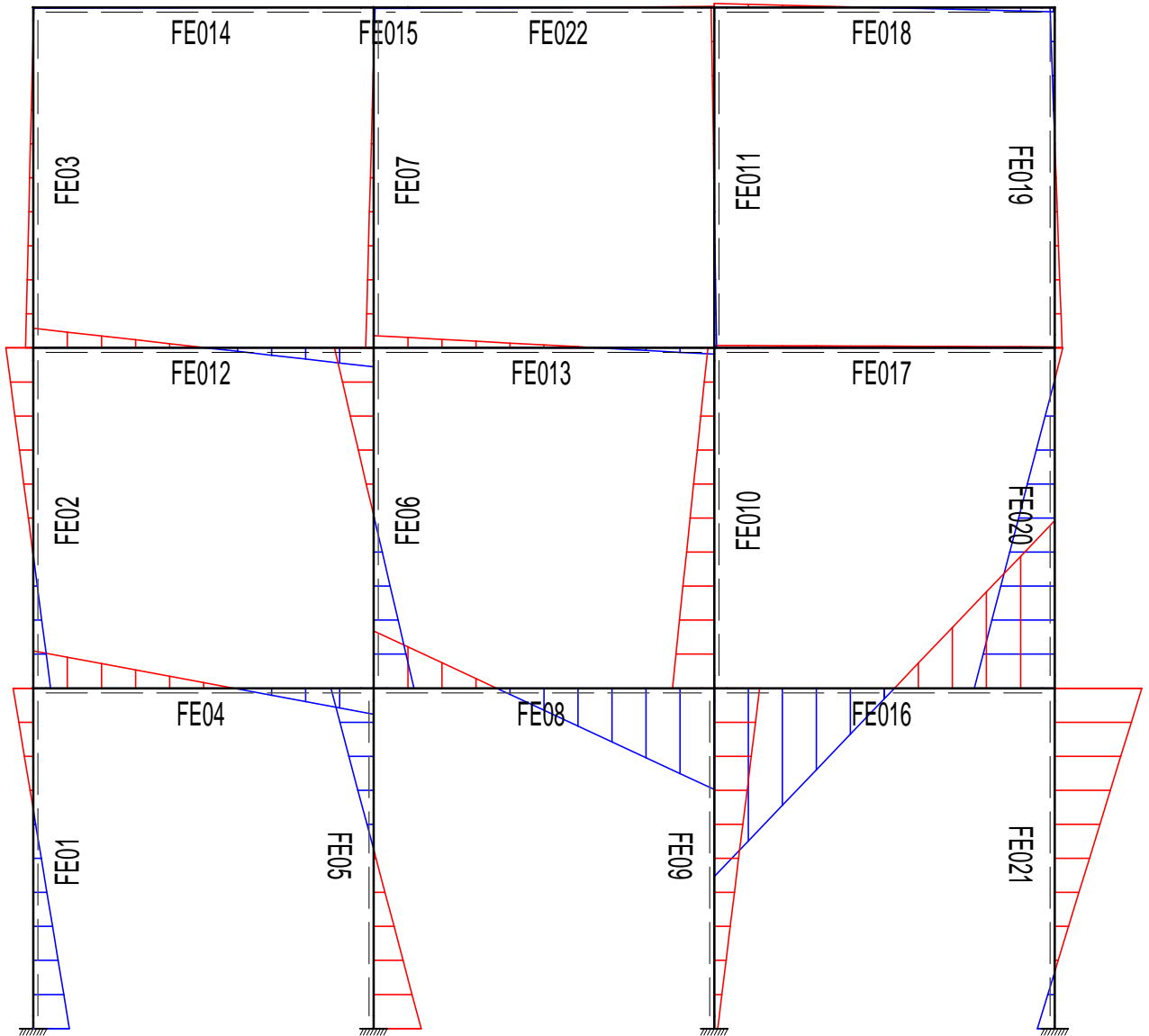
3. Untersuchung, Fall B

	ΔEI	$\Delta V1$	$\Delta V2$	$\Delta V3$	ΔVe
HEA180	-16683.7860	-2.58	-10.75	-4.16	-7.09
HEA200	-14201.8590	-2.20	-6.22	-3.25	-5.08
HEA220	-10595.0250	-1.64	-3.17	-2.16	-3.02
HEA240	-5652.7170	-0.87	-1.18	-1.00	-1.21
HEA280	6758.5140	1.05	0.80	0.91	0.76
HEA300	16397.9130	2.54	1.45	1.85	1.15



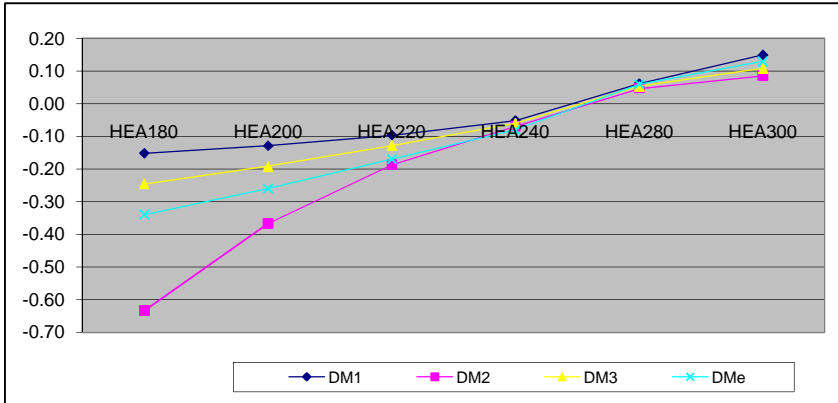
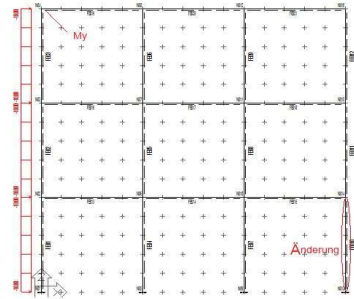
	ΔVe	$\Delta V1$	$\Delta V2$	$\Delta V3$
HEA180	-7.09	64%	52%	41%
HEA200	-5.08	57%	22%	36%
HEA220	-3.02	46%	5%	28%
HEA240	-1.21	28%	3%	17%
HEA280	0.76	38%	5%	19%
HEA300	1.15	121%	26%	61%



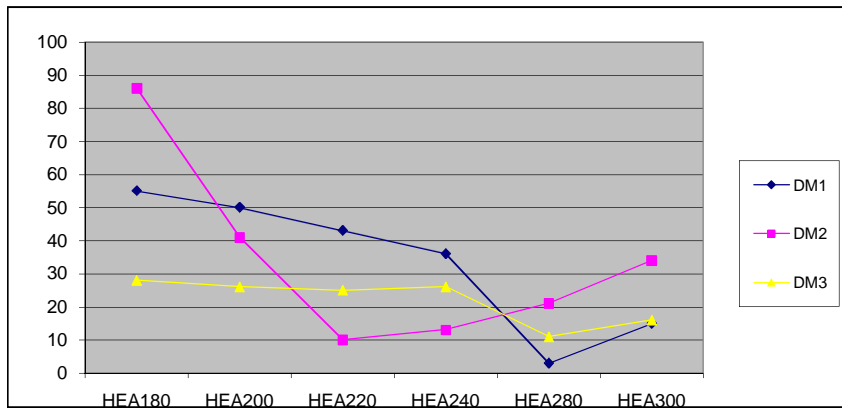


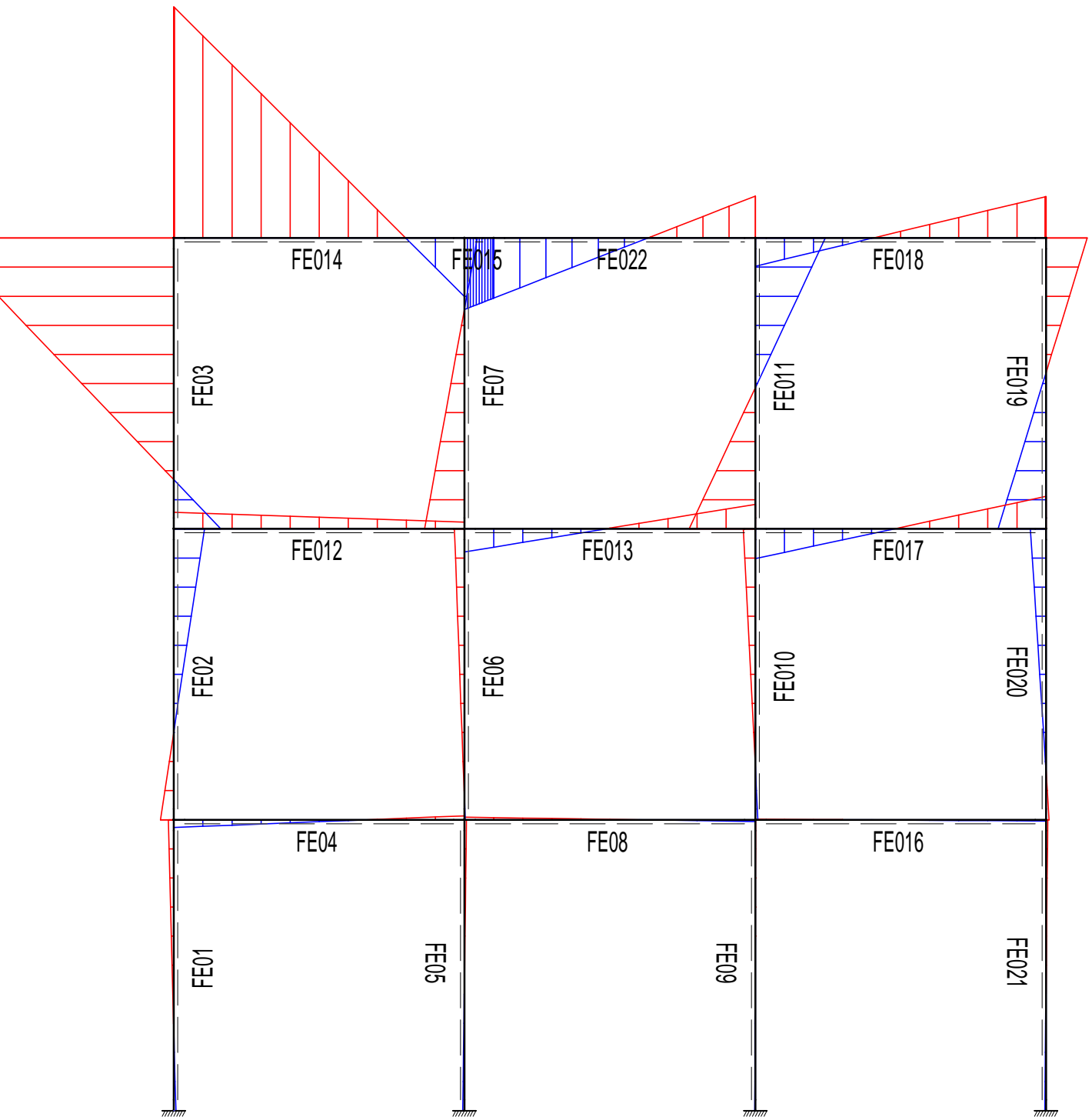
4. Untersuchung

	ΔEI	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$	ΔMe
HEA180	-16683.7860	-0.15	-0.63	-0.25	-0.34
HEA200	-14201.8590	-0.13	-0.37	-0.19	-0.26
HEA220	-10595.0250	-0.10	-0.19	-0.13	-0.17
HEA240	-5652.7170	-0.05	-0.07	-0.06	-0.08
HEA280	6758.5140	0.06	0.05	0.05	0.06
HEA300	16397.9130	0.15	0.09	0.11	0.13



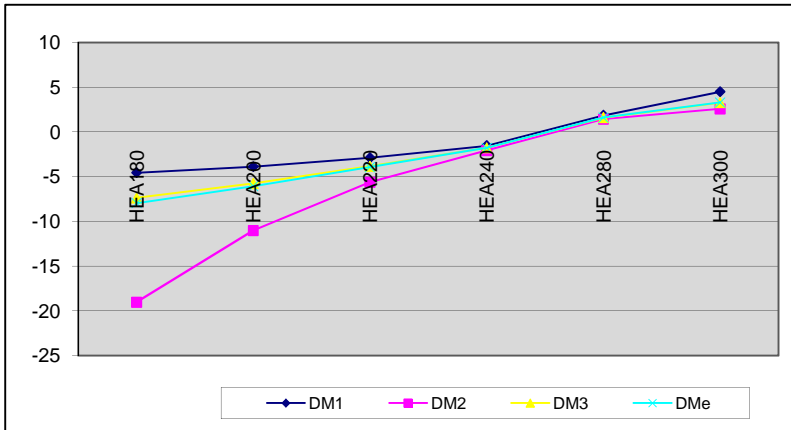
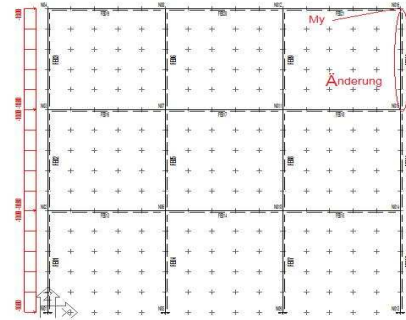
	ΔMe	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$
HEA180	-0.34	55%	86%	28%
HEA200	-0.26	50%	41%	26%
HEA220	-0.17	43%	10%	25%
HEA240	-0.08	36%	13%	26%
HEA280	0.06	3%	21%	11%
HEA300	0.13	15%	34%	16%



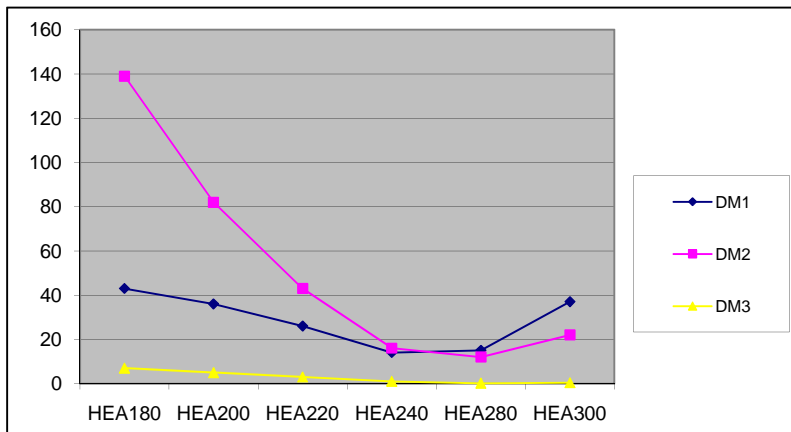


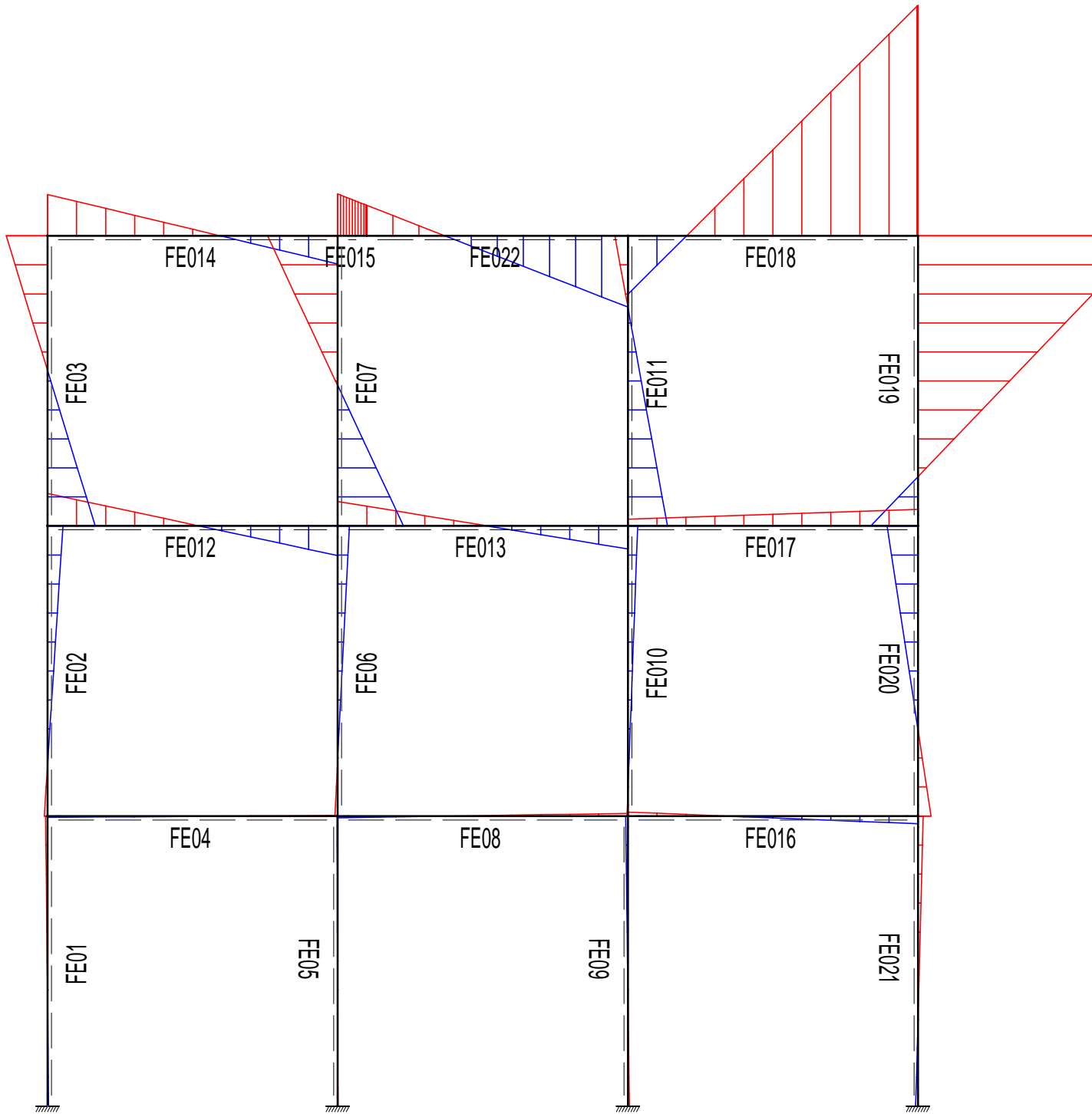
5. Untersuchung

	ΔEI	ΔEA	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$	ΔMe
HEA180	-16683.7860	-872957.40	-4.58	-19.06	-7.39	-7.97
HEA200	-14201.8590	-692777.40	-3.90	-11.03	-5.76	-6.06
HEA220	-10595.0250	-472067.40	-2.91	-5.62	-3.83	-3.94
HEA240	-5652.7170	-209567.40	-1.55	-2.09	-1.78	-1.8
HEA280	6758.5140	219252.60	1.85	1.42	1.61	1.61
HEA300	16397.9130	539922.60	4.50	2.58	3.28	3.29



	ΔMe	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$
HEA180	-7.97	43%	139%	7%
HEA200	-6.06	36%	82%	5%
HEA220	-3.94	26%	43%	3%
HEA240	-1.8	14%	16%	1%
HEA280	1.61	15%	12%	0%
HEA300	3.29	37%	22%	0%



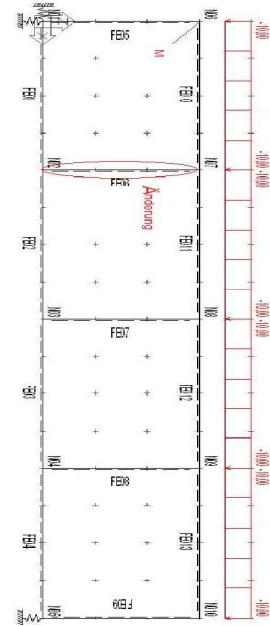
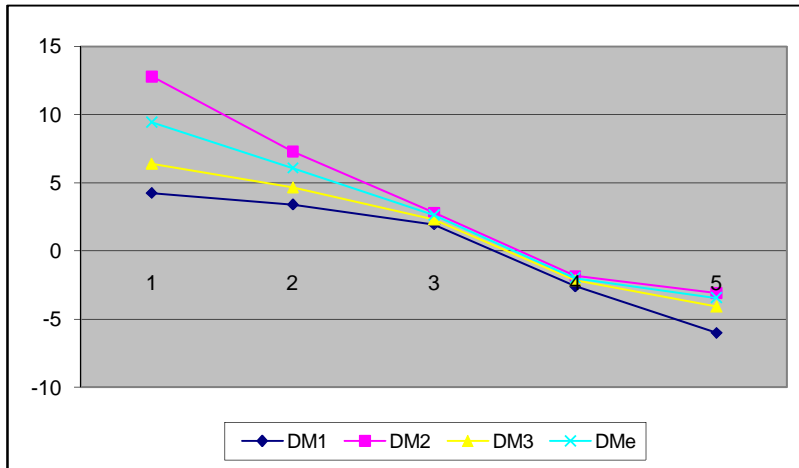


C Vierendeelträger

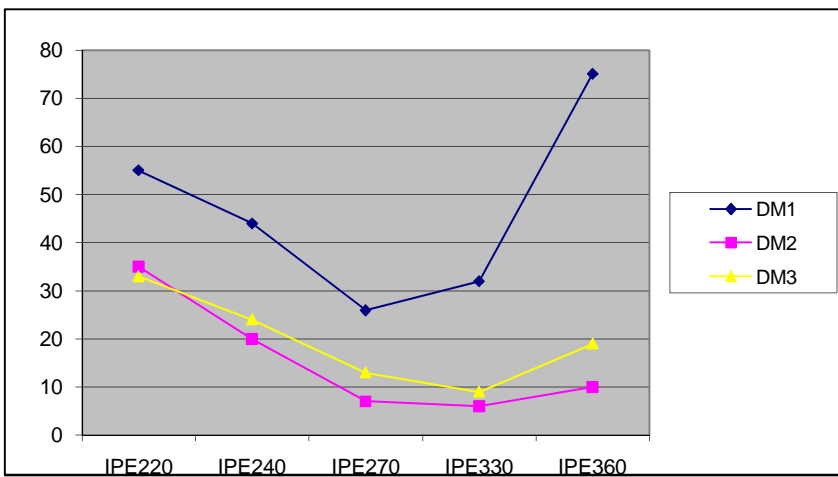
- 3. Untersuchung:** Die Momentenänderung an der oberen linken Ecke wird untersucht, wenn das Element FE06 gewechselt werde.

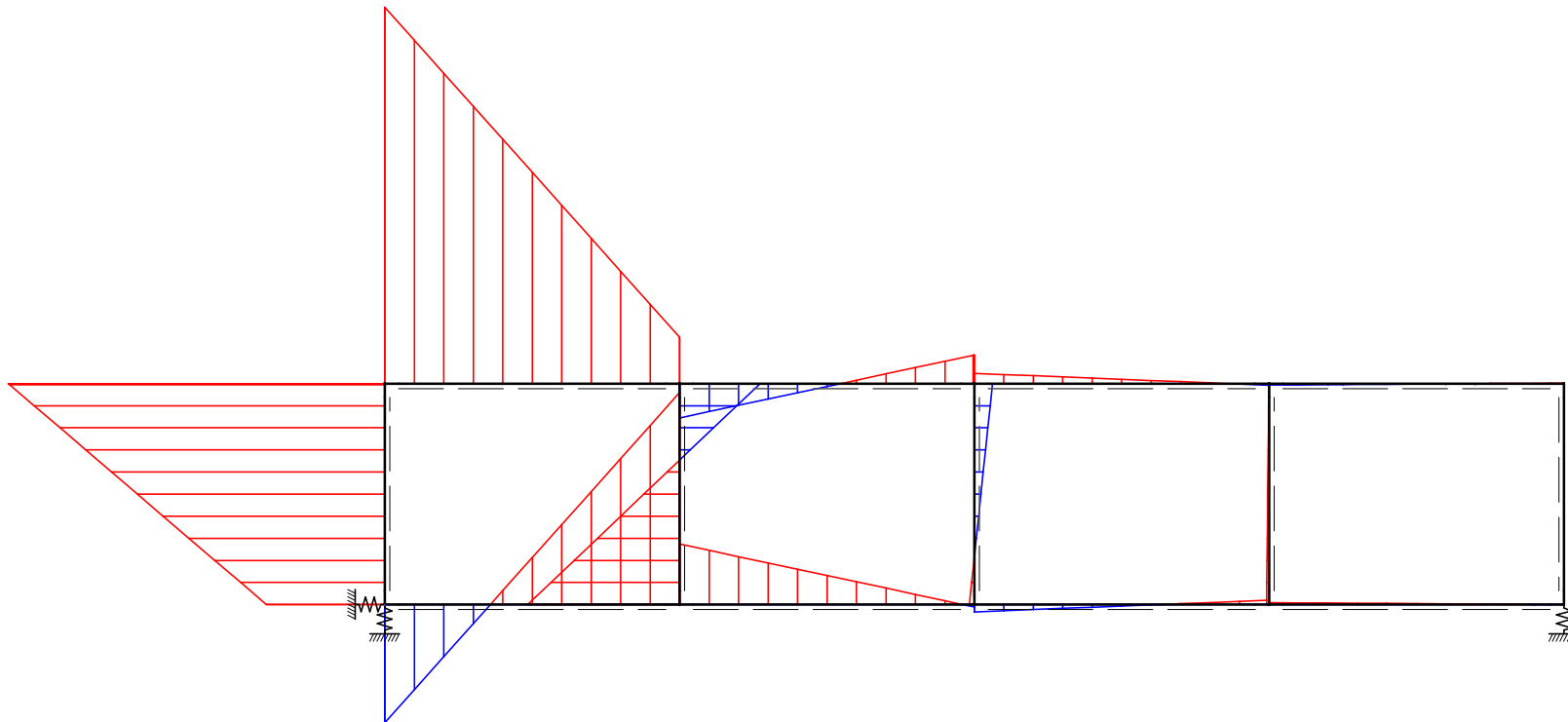
3. Untersuchung

	ΔEI	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$	ΔMe
IPE220	-11726.9460	4.25	12.81	6.38	9.46
IPE240	-9375.4080	3.40	7.29	4.63	6.09
IPE270	-5389.2720	1.95	2.82	2.31	2.64
IPE330	7162.6590	-2.59	-1.84	-2.15	-1.97
IPE360	16609.9920	-6.02	-3.09	-4.08	-3.44



	ΔMe	$\Delta M1$	$\Delta M2$	$\Delta M3$
IPE220	9.46	55%	35%	33%
IPE240	6.09	44%	20%	24%
IPE270	2.64	26%	7%	13%
IPE330	-1.97	32%	6%	9%
IPE360	-3.44	75%	10%	19%



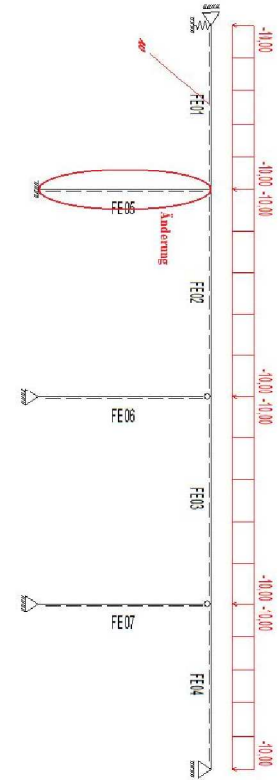
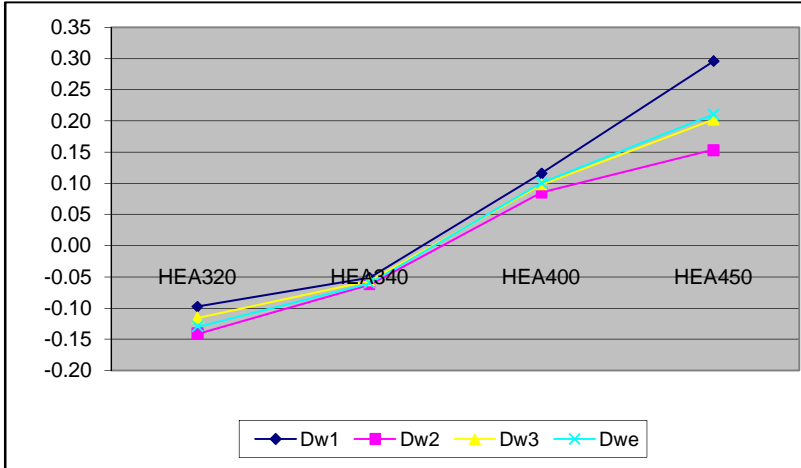


D Mehrfeldbrücke

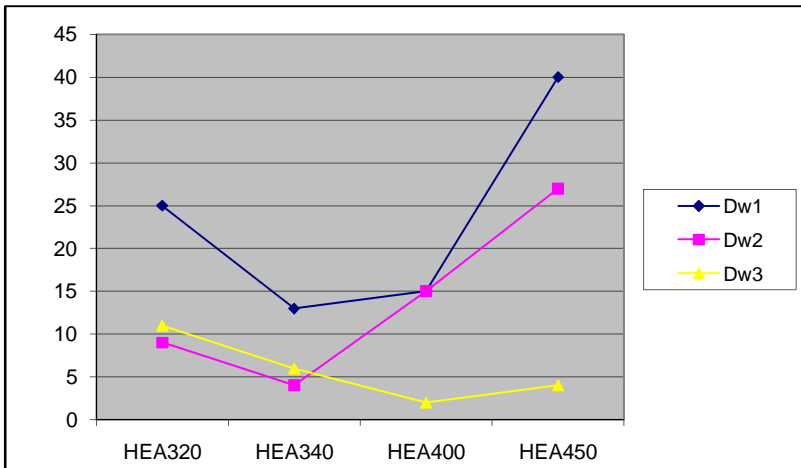
2. **Untersuchung** Es wird die Absinkung im Element FE01 an der Stelle $x = 2$ untersucht, wenn das Element FE05 gewechselt wird.
3. **Untersuchung** Es werden die Querkraftsänderung und die Momentenänderung an den gezeigten Stellen untersucht, wenn die Lagersteifigkeit geändert wird.

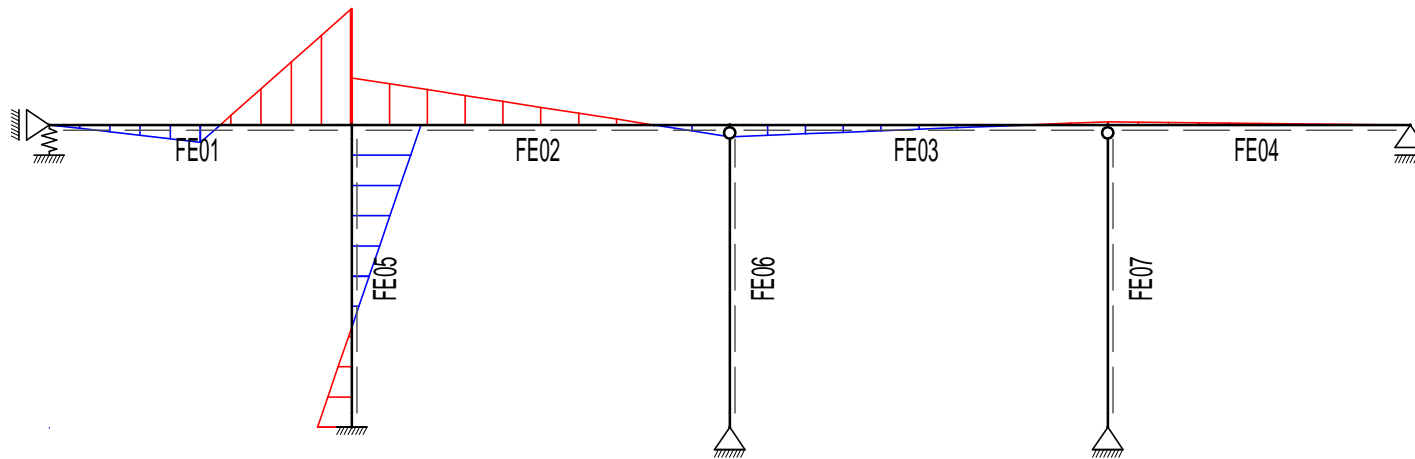
2. Untersuchung

	ΔEI	$\Delta \omega_1$	$\Delta \omega_2$	$\Delta \omega_3$	$\Delta \omega_e$
HEA320	-21338.4990	-0.10	-0.14	-0.12	-0.13
HEA340	-11333.0280	-0.05	-0.06	-0.06	-0.06
HEA400	25157.1600	0.12	0.08	0.10	0.1
HEA450	64326.8430	0.30	0.15	0.20	0.21



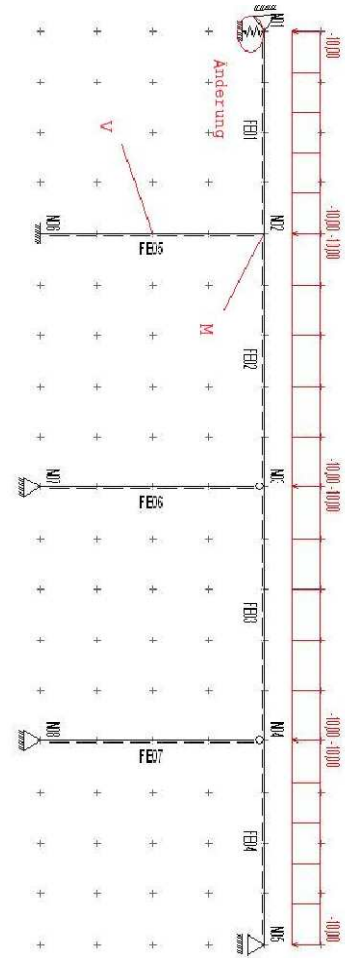
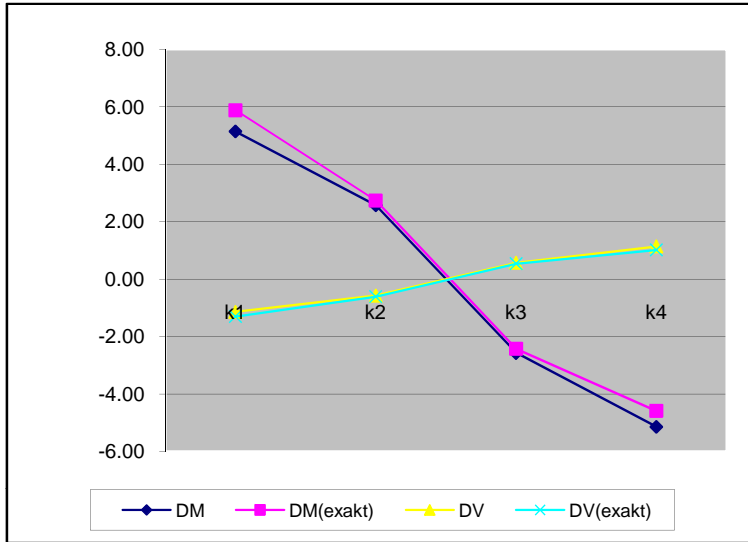
	$\Delta \omega_e$	$\Delta \omega_1$	$\Delta \omega_2$	$\Delta \omega_3$
HEA320	-0.13	25%	9%	11%
HEA340	-0.06	13%	4%	6%
HEA400	0.1	15%	15%	2%
HEA450	0.21	40%	27%	4%



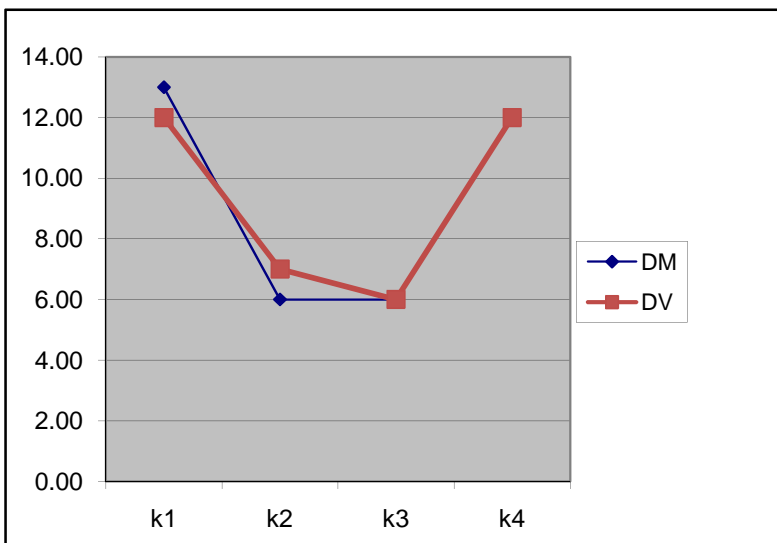


3. Untersuchung

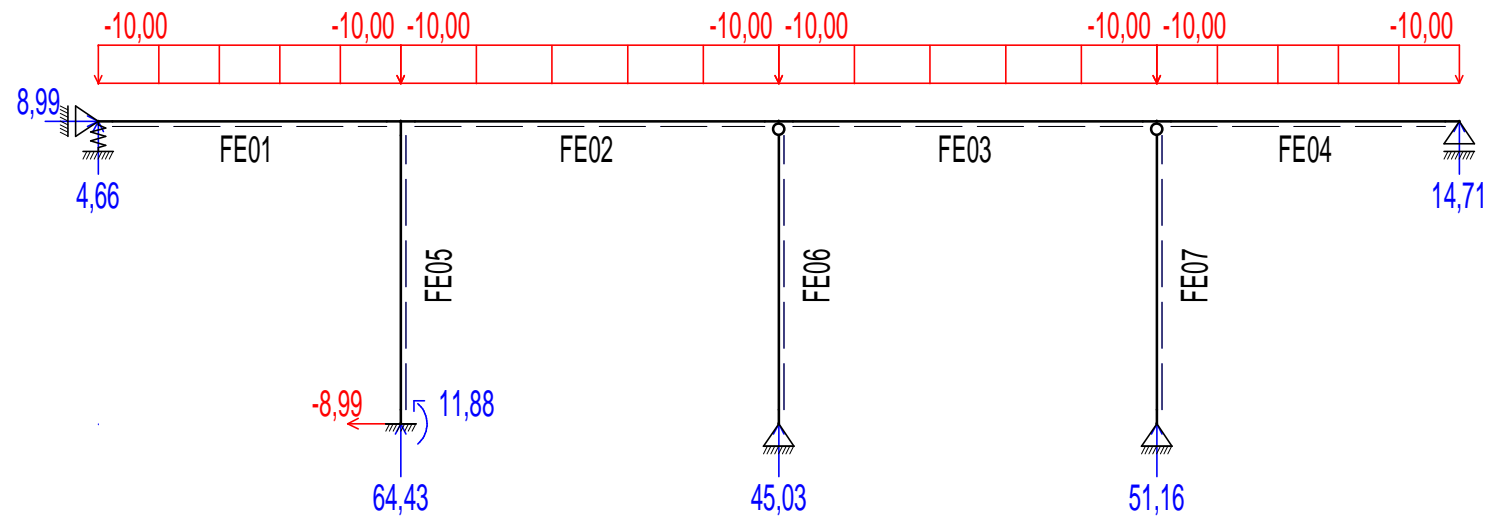
	ΔK	ΔM	$\Delta M(\text{exakt})$	ΔV	$\Delta V(\text{exakt})$
k1	400	5.14	5.88	-1.14	-1.3
k2	200	2.57	2.74	-0.57	-0.61
k3	-200	-2.57	-2.43	0.57	0.54
k4	-400	-5.14	-4.59	1.14	1.02



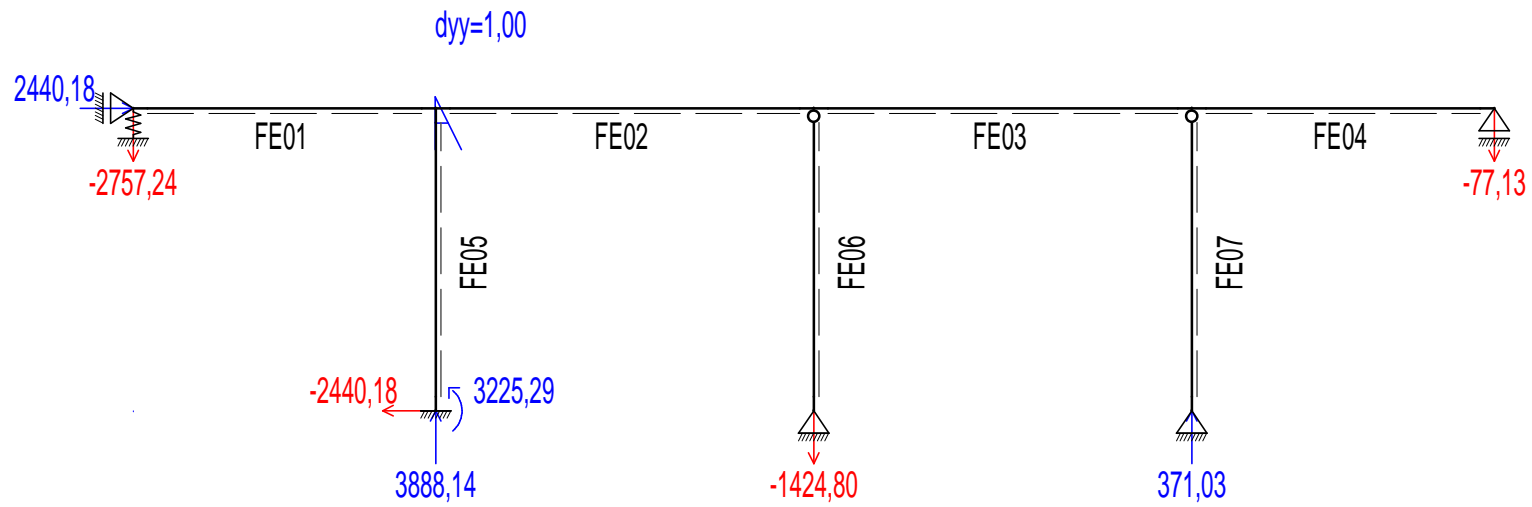
	$\Delta M(\text{exakt})$	ΔM	$\Delta V(\text{exakt})$	ΔV
k1	5.88	13	-1.30	12
k2	2.74	6	-0.61	7
k3	-2.43	6	0.54	6
k4	-4.59	12	1.02	12



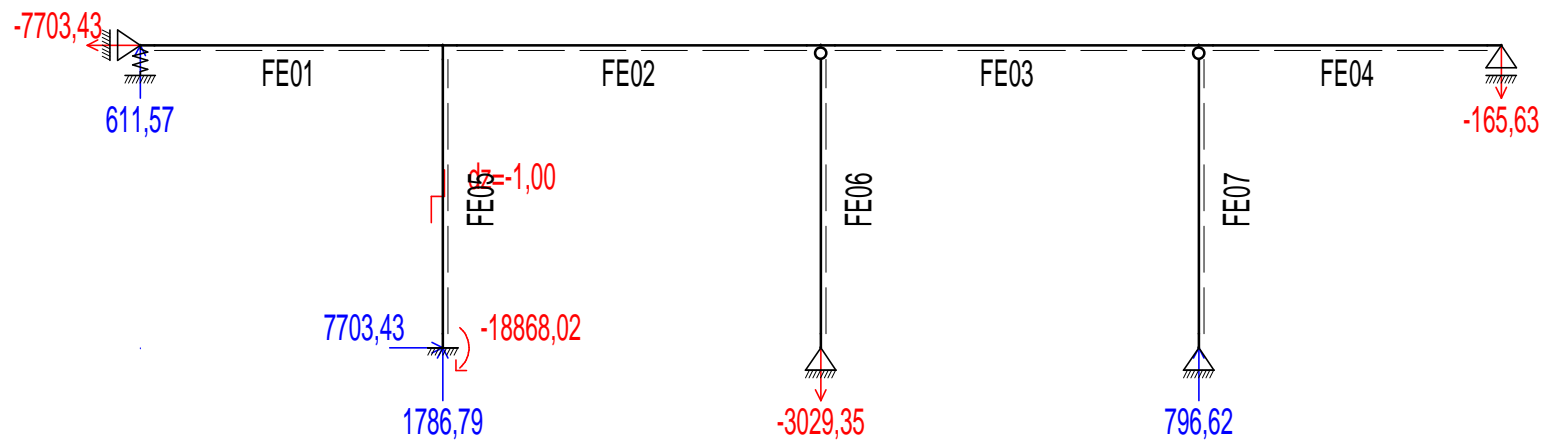
Auflagerreaktionen aus dem Eigengewicht



Auflagerreaktionen aus G2 an der untersuchten Stelle



Auflagerreaktionen aus G3 an der untersuchten Stelle

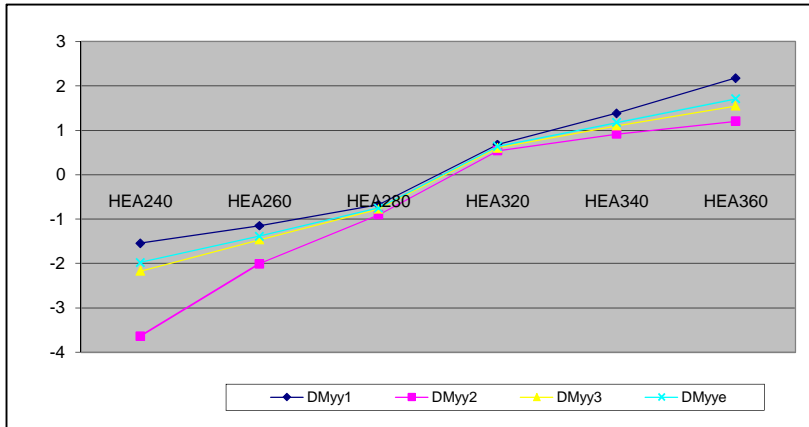
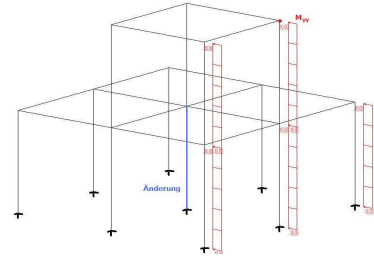


E Zweiter 3D-Rahmen

Eine Weitere Untersuchung des 3D-Rahmens wird hier durchgeführt.

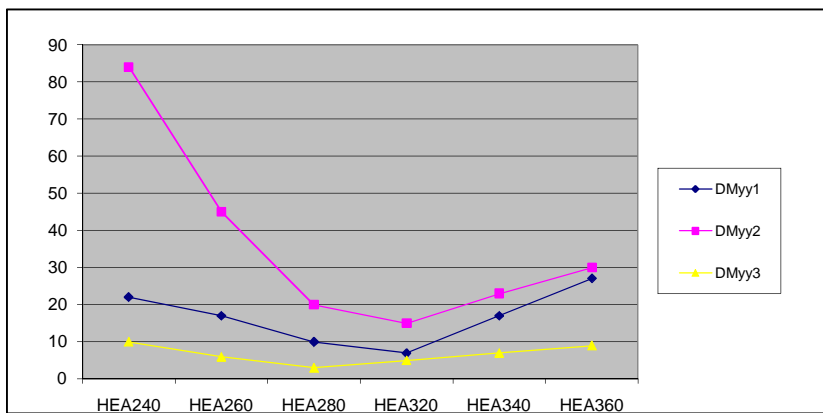
2. Untersuchung

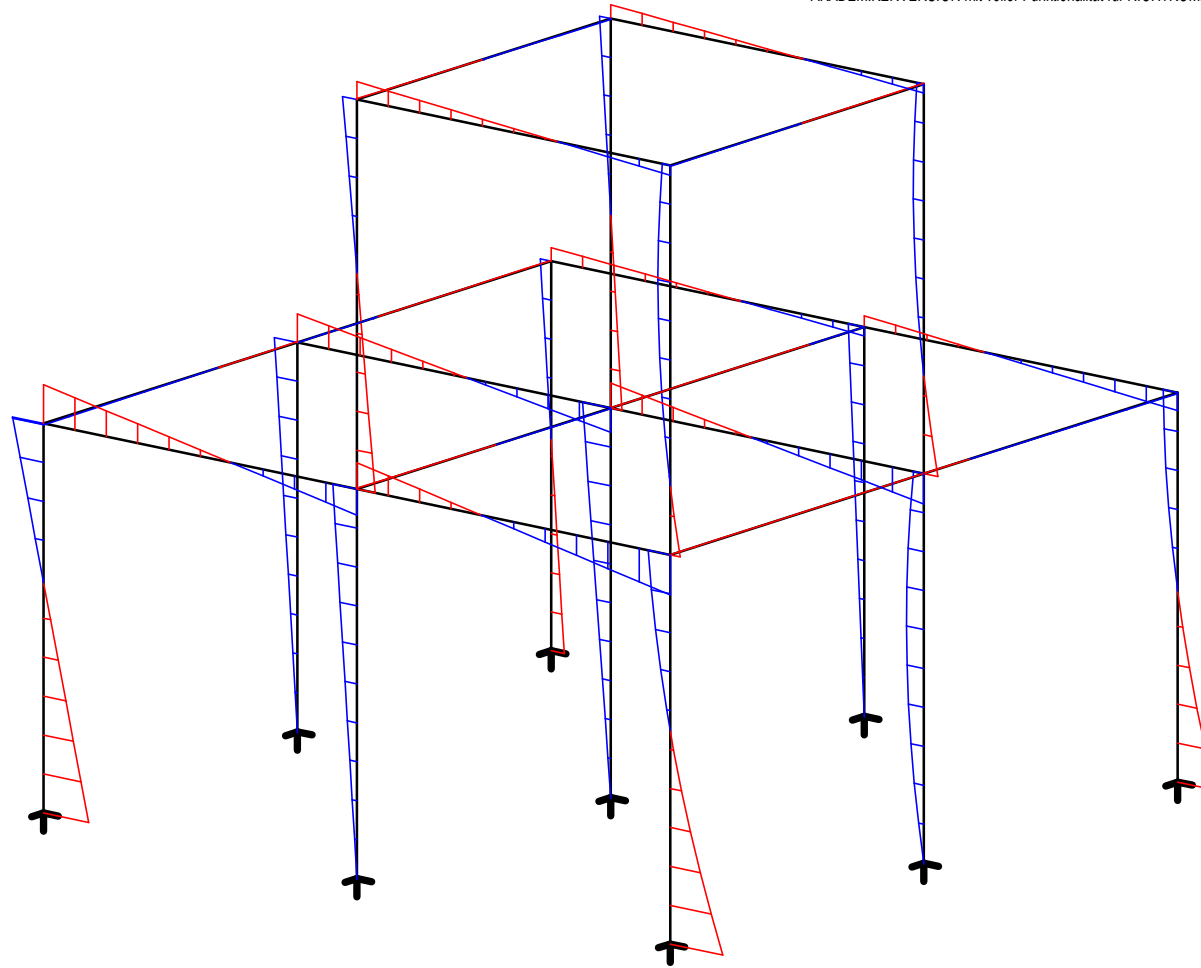
	ΔEI_{yy}	ΔEI_{zz}	ΔM_{yy1}	ΔM_{yy2}	ΔM_{yy3}	ΔM_{yye}
HEA240	-22050.6300	-7435.5540	-1.54	-3.63	-2.17	-1.97
HEA260	-16397.9130	-5548.1790	-1.15	-2.00	-1.46	-1.38
HEA280	-9639.3990	-3248.5110	-0.67	-0.90	-0.77	-0.75
HEA320	9796.6890	1418.9280	0.69	0.55	0.61	0.64
HEA340	19802.1600	2365.5240	1.39	0.91	1.10	1.18
HEA360	31135.1880	3312.3090	2.18	1.20	1.55	1.71



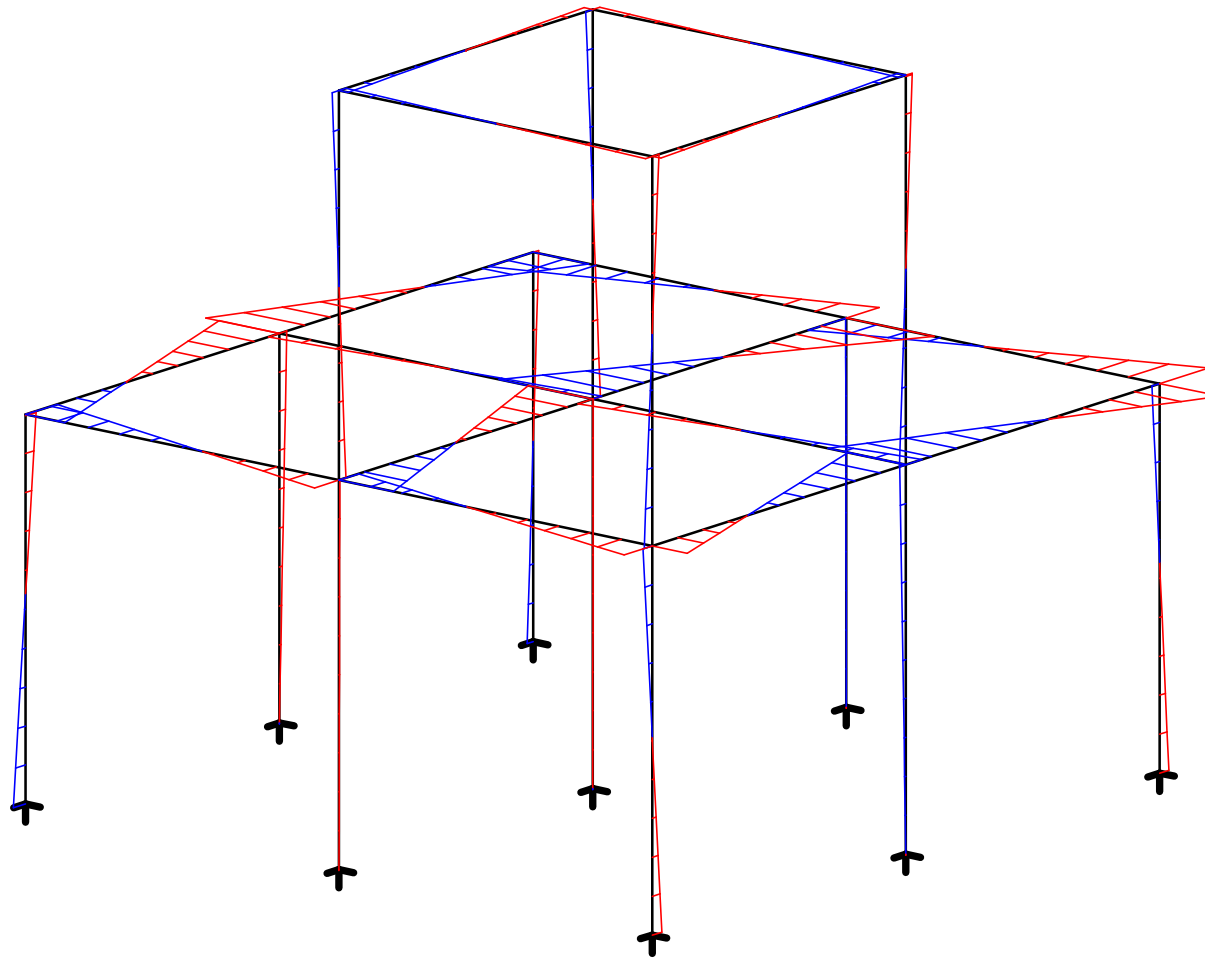
Fehlerprozentsatz

	ΔM_{yye}	ΔM_{yy1}	ΔM_{yy2}	ΔM_{yy3}
HEA240	-1.97	22%	84	10
HEA260	-1.38	17%	45%	6%
HEA280	-0.75	10%	20%	3%
HEA320	0.64	7%	15%	5%
HEA340	1.18	17%	23%	7%
HEA360	1.71	27%	30%	9%

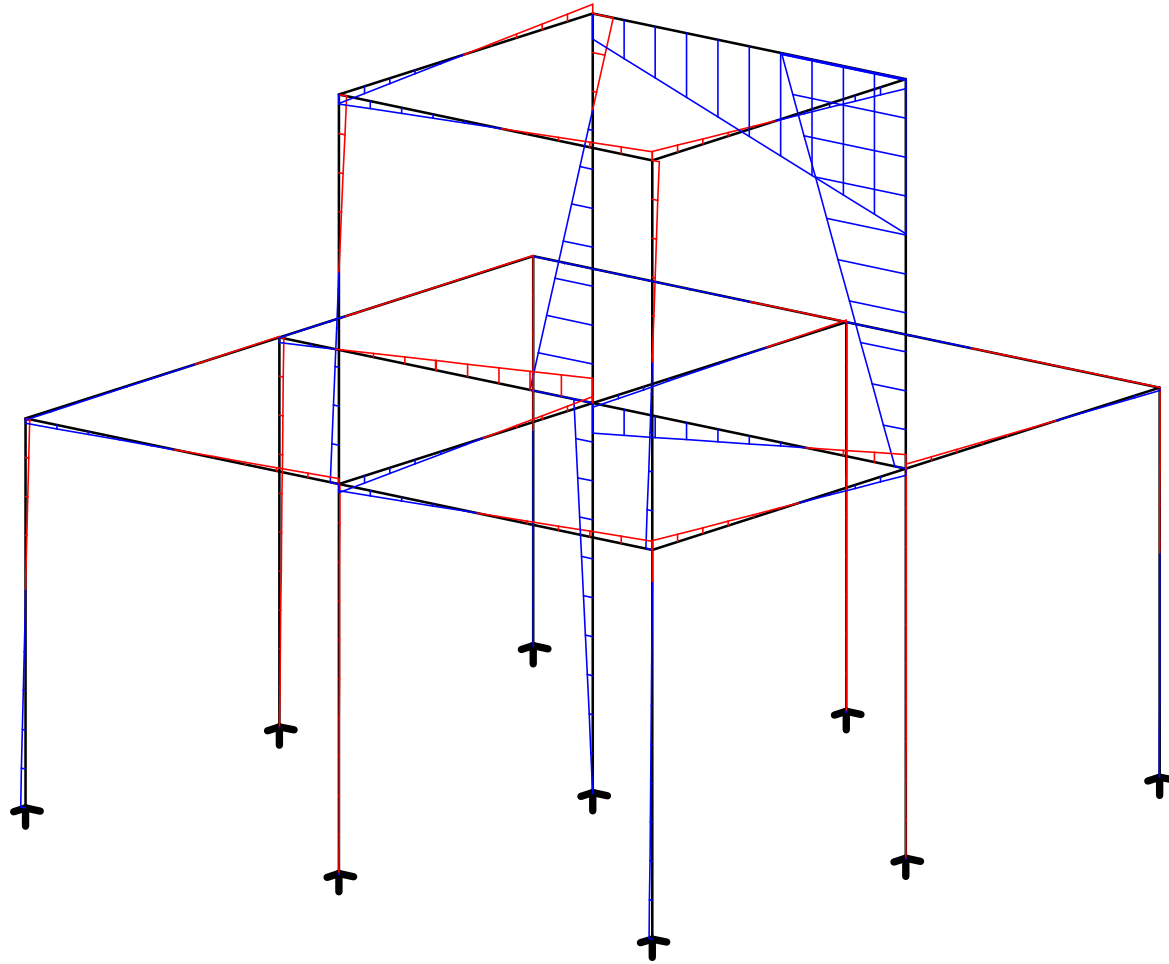




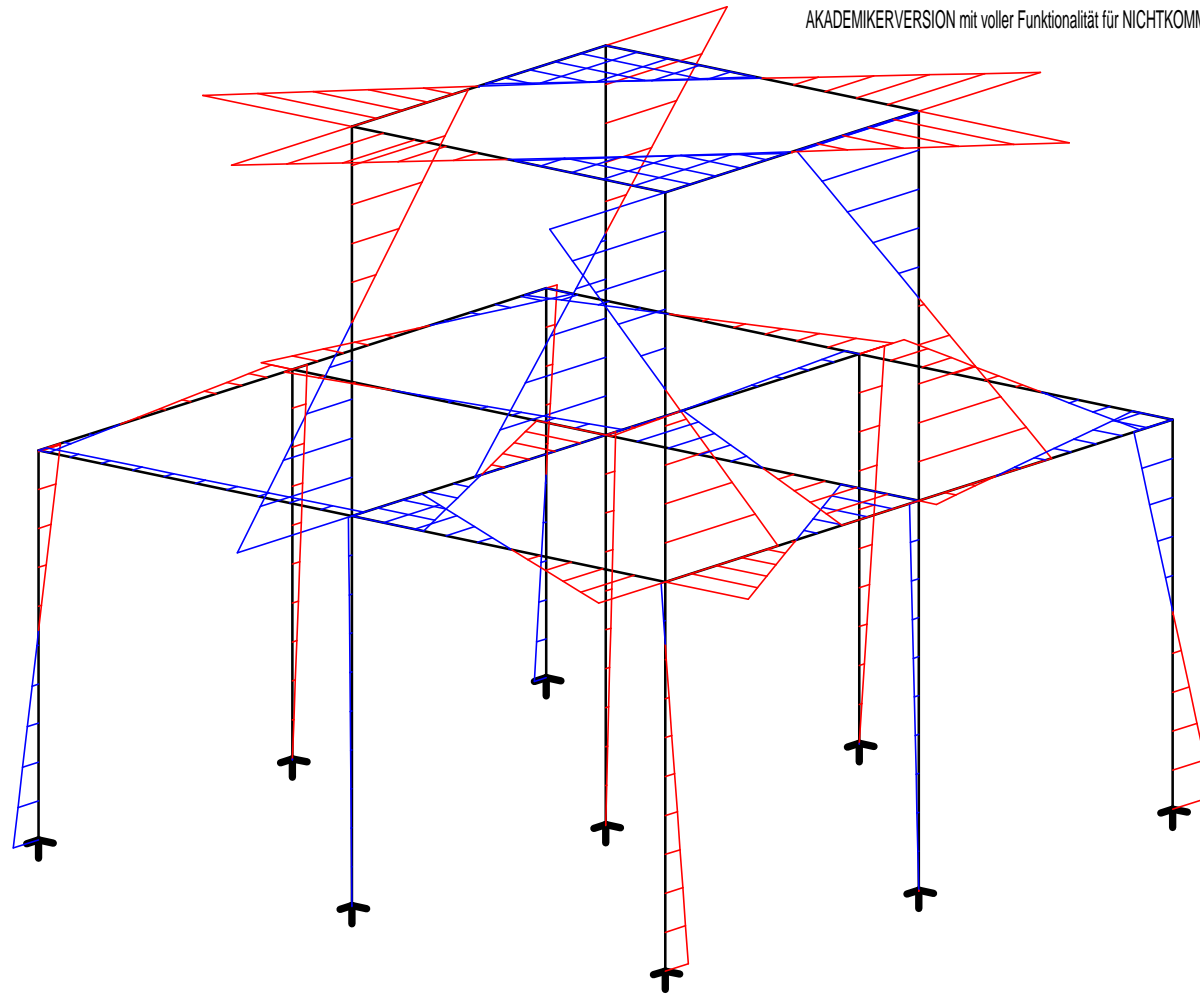
Position: System2	Maßstab: 1/75
Myy [kNm] - LC001	
Th. I. Ord., ohne Schubv..	



Position: System2	Maßstab: 1/75
Mzz [kNm] - LC001	
Th. I. Ord., ohne Schubv..	



Position: System2	Maßstab: 1/75
Myy [kNm] - LC004	
Th. I. Ord., ohne Schubv..	



Position: System2	Maßstab: 1/75
Mzz [kNm] - LC004	
Th. I. Ord., ohne Schubv..	