

Diplom I

# Sensitivitätsanalyse an dem FE-Modell eines Bürogebäudes

Boris Takunov

Matrikelnummer: 25203581

E-Mail: [boris.takunov@student.uni-kassel.de](mailto:boris.takunov@student.uni-kassel.de)

Kassel, den 30.03.2009

Erstprüfer:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann

Zweitprüfer:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Fehling



# Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Kassel, den 30.03.2009

Boris Takunov



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sensitivitätsanalyse</b>	<b>3</b>
2.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	3
2.2	Herleitung . . . . .	7
2.3	Anwendung . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modell</b>	<b>19</b>
3.1	Allgemeine Beschreibung . . . . .	19
3.2	Eingabe in SOFiSTiK . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>31</b>
4.1	Fehleranalyse . . . . .	31
4.2	Berechnungen . . . . .	34
4.2.1	Beispiel 1 . . . . .	34
4.2.2	Beispiel 2 . . . . .	42
4.2.3	Beispiel 3 . . . . .	45
4.2.4	Beispiel 4 . . . . .	49
4.2.5	Beispiel 5 . . . . .	51
4.3	Kalibrierung . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>57</b>

Inhaltsverzeichnis

**Abbildungsverzeichnis** 59

**Literaturverzeichnis** 61

# 1 Einleitung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Auswertung der Einflussfunktionen im Sinne der Sensitivitätsanalyse.

Das Verfahren zur Sensitivitätsanalyse wurde von Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann entwickelt. Es basiert auf der Methode der Einflussfunktionen, anhand derer man den Auswirkungsbereich von der Belastung bestimmen kann, und auf den Prinzipien der schwachen Formulierung und der Gleichheit der virtuellen inneren und äußeren Arbeiten. Angewandt liefert die Sensitivitätsanalyse die Abschätzung der Robustheit bzw. der Anfälligkeit des Tragwerks auf lokale Schwächungen. Die theoretischen Hintergründe, die Herleitung sowie die Anwendung der Sensitivitätsanalyse werden in dem Kapitel 'Sensitivitätsanalyse' genau erläutert.

Es wird die Anwendbarkeit der Sensitivitätsanalyse an dem 3D-Modell eines dreistöckigen Bürogebäudes untersucht. Es handelt sich um ein dreistöckiges Gebäude aus Stahlbeton. Dazu wurde im Programm 'SOFiSTiK' auf der Grundlage der Architektenpläne ein Modell erstellt und vorbemessen. Die genaue Beschreibung des Modells und des Tragkonzeptes und der Eingabe erfolgt im Kapitel 'Modell'.

Im Kapitel 'Rechenbeispiele' wird zunächst eine Fehleranalyse durchgeführt, und anschließend das beschriebene Verfahren an dem 3D-Modell überprüft. Es werden sowohl Kraft- als auch Weggrößen untersucht, in Abhängigkeit von unterschiedlichen Steifigkeitsänderungen in Scheiben, Platten und Stützen. Für jedes Beispiel wird eine Gegenüberstellung erstellt, in der die Ergebnisse nach dem Näherungsverfahren der Sensitivitätsanalyse mit den exakten Werten verglichen werden. Anhand dieser Ergebnisse kann man auf die Genauigkeit und die Anwendbarkeit des Verfahrens

## 1 Einleitung

schließen.

Anschließend, im letzten Kapitel dieser Arbeit, werden die gewonnenen Ergebnisse über die Sensitivitätsanalyse kurz vorgestellt und ausgewertet.

## 2 Sensitivitätsanalyse

### 2.1 Theoretische Grundlagen

Einflusslinie ist eine Funktion, die die Wirkung einer Belastung auf eine zu untersuchende Schnittgröße an einer bestimmten Stelle angibt. Aus dieser Funktion kann man erkennen, wie groß der Einfluss einer Belastung, abhängig von der Lastangriffsstelle, auf eine bestimmte Schnittgröße ist.

Die Einflussfunktionen werden erzeugt, indem man an der betrachteten Stelle eine entsprechende 1-Verformung bzw. -Belastung aufbringt. Die daraus resultierende Verformungsfigur des Tragwerkes entspricht der oder ist die gesuchte Einflusslinie. Die Einflussfunktion gibt an, in welchem Verhältnis die resultierende Schnittgröße zu der aufgebrachten Belastung steht, und lässt daraus auch schließen, wie gut das Tragwerkskonzept ist. Somit sind die Einflusslinien ein hilfreiches Werkzeug zur Beurteilung des statischen Systems.

Für die Erstellung einer Einflussfunktion bedarf es, je nach der betrachteten Schnittgröße, einer anderen Belastung. Diese sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Um die Einflusslinie ( $EL$ ) für die Durchbiegung zu bestimmen, muss man das Trag-

**Tabelle 2.1:** Einflusslinien

Betrachtete Größe	Aufzubringende Belastung	Dirac-Delta	Green'sche Funktion
$w$	Einzellast $\bar{F} = 1$	$\delta_0$	$G_0$
$w'$	Moment $\bar{M} = 1$	$\delta_1$	$G_1$
$w'' = M$	Knick 1	$\delta_2$	$G_2$
$w''' = V$	Versatz 1	$\delta_3$	$G_3$

werk mit der Einzellast  $\bar{F} = 1$  an der betrachteten Stelle belasten. Analog gilt, dass man für die Einflussfunktion von der Verdrehung ( $EL - w'$ ) das Moment  $\bar{M} = 1$  auf das Tragsystem aufbringt. Für die restlichen Arten von Einflussfunktionen ist das Vorgehen analog. Für die Bestimmung der  $EL - w''$  wird der Knick 1 aufgebracht, für die  $EL - w'''$  - der Versatz 1.

An dieser Stelle kann man auch die Definition des Dirac-Deltas  $\delta_i(y, x)$  einführen. Das Dirac-Delta ist eine Funktion, mit der man eine Belastung beschreiben kann, die nur an einer bestimmten Stelle den Wert 1 aufweist, und an allen anderen Stellen den Wert 0. Somit kann man mit dem Dirac-Delta die entsprechende Last darstellen, die zur Erzeugung der Einflussfunktion nötig ist. Abhängig von der Schnittgröße von der gesuchten EL ändert sich das Index, und es ist dadurch klar zugeordnet, welche Größe beschrieben wird.

Formelmäßig wird Dirac-Delta folgendermaßen definiert:

$$\delta_i(y, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(y, x) dy = 1 \quad \text{für } x = y \quad (2.1)$$

$$\delta_i(y, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(y, x) dy = 0 \quad \text{für } x \neq y \quad (2.2)$$

d.h., dass das eine Funktion ist, die an der Stelle  $x$  den Wert 1 besitzt, an allen anderen ist sie 0.

In der Anwendung führt es z.B. zum folgenden Ergebnis: Überlagert man das Dirac-Delta mit einer beliebigen Funktion

$$\int_0^l \delta_i(y, x) f(y) dy = 1 * f(x) = f(x), \quad (2.3)$$

so bekommt man den Wert dieser Funktion an der Stelle  $x$ . Somit kann man den Wert einer Funktion an einer Stelle abfragen bzw. bestimmen.

Wendet man das oben beschriebene Prinzip an, so kann man eine Belastung definieren, aus der eine Einflusslinie resultiert:

Einzelkraft  $\bar{F} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_0(y, x) w(y) dy = w(x) \quad (2.4)$$

Moment  $\bar{M} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) dy = w'(x) \quad (2.5)$$

Knick der Größe 1:

$$\int_0^l \delta_2(y, x) w(y) dy = w''(x) = M(x) \quad (2.6)$$

Versatz der Größe 1:

$$\int_0^l \delta_3(y, x) w(y) dy = w'''(x) = V(x) \quad (2.7)$$

Dies sind die Einflussfunktionen für die gesuchten Größen eines Balkens. Bei dem Knick der Größe 1 ist zu beachten, dass mit der 1 die Summe  $\tan(\varphi_1) + \tan(\varphi_2)$  gemeint ist. Dabei ist  $\varphi_i$  der Winkel von der Verformungsfigur des Balkens zur ursprünglichen Achse des Balkens.

Für den Stab folgt:

Einzelkraft  $\bar{F} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_0(y, x) u(y) dy = u(x) \quad (2.8)$$

Versatz 1:

$$\int_0^l \delta_1(y, x) u(y) dy = N(x) \quad (2.9)$$

Analog werden die Einflusslinien für die Kraft- und Weggrößen einer schubstarrten Platte bestimmt:

Einzelkraft  $\bar{F} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_0(y, x) w(y) d\Omega = w(x) \quad (2.10)$$

Moment  $m_{xx} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) d\Omega = w_{,x}(x) \quad (2.11)$$

Moment  $m_{yy} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) d\Omega = w_{,y}(x) \quad (2.12)$$

Moment  $m_{xy} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) d\Omega = w_{,xy}(x) \quad (2.13)$$

Knick in  $x$ -Richtung:

$$\int_0^l \delta_2(y, x) w(y) d\Omega = m_{xx}(x) \quad (2.14)$$

Knick in  $y$ -Richtung:

$$\int_0^l \delta_2(y, x) w(y) d\Omega = m_{yy}(x) \quad (2.15)$$

Knick:

$$\int_0^l \delta_2(y, x) w(y) d\Omega = m_{xy}(x) \quad (2.16)$$

Versatz in  $x$ -Richtung:

$$\int_0^l \delta_3(y, x) w(y) d\Omega = q_x(x) \quad (2.17)$$

Versatz in  $y$ -Richtung:

$$\int_0^l \delta_3(y, x) w(y) d\Omega = q_y(x) \quad (2.18)$$

Und für die Scheiben:

Einzelkraft  $\bar{F} = 1$ :

$$\int_0^l \delta_0(y, x) u(y) d\Omega = u(x) \quad (2.19)$$

Versatz 1:

$$\int_0^l \delta_1(y, x) w(y) d\Omega = \sigma(x) \quad (2.20)$$

Durch das Aufbringen der oben beschriebenen Belastungen entstehen die Einflussfunktionen, oder die Green'sche Funktionen, für die gesuchten Schnittgrößen.

## 2.2 Herleitung

Basierend auf den Einflussfunktionen/Green'schen Funktionen wurde das Verfahren zur Sensitivitätsanalyse entwickelt. Mit diesem Verfahren kann man die Änderungen der Schnittgrößen im Tragwerk bestimmen, die aus einer Schwächung des Systems hervorgehen.

Nach dem Satz von Betti würde die Änderung des Momentes folgendermaßen bestimmt werden:

$$J_c(x) - J(x) = \int [G_i^c(y, x) - G_i(y, x)]p(y)dy \quad (2.21)$$

Mit  $c$  - changed system,  $J$  - die gesuchte Schnittgröße, und  $G_i$  die entsprechende Green'sche Funktion. Bei diesem Ansatz müsste man jedoch über alle belastete Tragwerkselemente integrieren, beim Lastfall Eigengewicht sogar über das ganze Tragwerk. Ein weiterer Nachteil ist, dass man die Werte aus dem geänderten System braucht. Somit weist sich diese Vorgehensweise als nicht ganz geeignet, weil man das veränderte System trotzdem modellieren muss, und es ist einfacher sofort die neuen Werte zu berechnen, als sich des Satzes von Betti zu bedienen.

Alternativer Ansatz ist die schwache Formulierung. Man definiert das Ausgangsproblem:

$$\int_0^l EI w'' v'' dx = \int_0^l p v dx \quad (2.22)$$

Daraus bildet man ein modifiziertes Problem:

$$\int_0^l EI w_c'' v'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' v'' dx = \int_0^l p v dx \quad (2.23)$$

Hierbei ist der Intervall  $x_1$  bis  $x_2$  der Bereich des geänderten  $EI$ . Man sieht deutlich, dass der Unterschied nur in dem Term

$$\int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' v'' dx \quad (2.24)$$

liegt. Dieser ist gleich  $d(u, v)$ . Somit:

$$a(u_c, v) + d(u_c, v) = (p, v) \quad (2.25)$$

Weiterhin definiert man den Unterschied in der Verformung:

$$e_u = u_c - u \quad (2.26)$$

Daraus folgt dann:

$$J(e_u) = J(u_c) - J(u) \quad (2.27)$$

Dies sei der Unterschied in den Schnittgrößen. Hierbei ist  $J(\cdot)$  die betrachtete Schnittgröße.

Wenn man jetzt von dem Ausgangsproblem, Gleichung 2.22, das modifizierte Problem, Gleichung 2.23, abzieht, bekommt man den Ausdruck:

$$a(e_u, v) = -d(u_c, v) \quad (2.28)$$

Und nach dem Einsetzen von der Green'schen Funktion  $G_i$  für die Verformungsfigur  $v$  erhält man den Ausdruck:

$$J(e_u) = a(e_u, G) = -d(u_c, G) \quad (2.29)$$

Hierbei sind immer noch die Werte aus beiden Systemen notwendig, obwohl man nicht mehr über das ganze System integrieren muss, wie bei dem Ansatz nach Betti. Daher, um die Veränderung in den Schnittgrößen zu bestimmen, wird eine Vereinfachung bzw. Näherung eingeführt.

Man definiert ein Ausgangsproblem:

$$a(G, v) = J(v) \quad (2.30)$$

Daraus folgt dann mit der Verknüpfung an die Gl. 2.29:

$$J(e_u) = -d(u, G_c) = -d(u, G) - d(u, G_c - G) \quad (2.31)$$

Vernachlässigt man den zweiten Term, so bekommt man den Ausdruck:

$$J(e_u) \simeq -d(u, G) \quad (2.32)$$

Das ist die zentrale Gleichung der Sensitivitätsanalyse, mit der man die Änderung der Schnittgrößen abschätzen kann. Der große Vorteil dieser Näherungsformel ist, dass hier nur die Werte aus dem ursprünglichen System notwendig sind.

Es gibt auch einen anderen Weg diese Formel herzuleiten. Dieser basiert auf dem Prinzip der Gleichheit der virtuellen inneren und äußeren Arbeiten.

Ist ein Tragwerk im Gleichgewicht, dann sind für jede virtuelle Verrückung die virtuellen äußeren Arbeiten gleich den virtuellen inneren Arbeiten

$$\delta A_a = \delta A_i. \quad (2.33)$$

Dies gilt auch für das modifizierte, das geänderte Tragwerk

$$\delta A_a^c = \delta A_i^c \quad c = \text{change}. \quad (2.34)$$

Nachdem sich aber die Belastung nicht ändert, müssen bei gleicher virtueller Verrückung der beiden Tragwerke die virtuellen äußeren Arbeiten gleich groß sein, da sich die Belastung nicht ändert,

$$\delta A_a = \delta A_a^c, \quad (2.35)$$

und wegen des Prinzips der virtuellen Verrückungen, müssen daher auch die virtuellen inneren Arbeiten gleich groß sein

$$\delta A_i = \delta A_a = \delta A_a^c = \delta A_i^c. \quad (2.36)$$

Wir wollen im Folgenden diese Überlegungen benutzen, um die Änderung der Durchbiegung bei einem Zweifeldträger zu berechnen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für diesen Träger lautet

$$\delta A_i = \int_0^l EI w'' \delta w'' dx = \int_0^l p \delta w dx = \delta A_a. \quad (2.37)$$

Wenn sich nun in einem Intervall  $[x_1, x_2]$ , die Steifigkeit des Trägers ändert,  $EI \rightarrow EI + \Delta EI$ , dann lautet das Prinzip der virtuellen Verrückung

$$\delta A_i^c = \int_0^l EI w_c'' \delta w'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' \delta w'' dx = \int_0^l p \delta w dx = \delta A_a^c. \quad (2.38)$$

Hierbei ist  $w_c$  die Biegelinie an dem modifizierten Träger. Man beachte, dass durch die Modifikation der Steifigkeit, sich die virtuelle innere Energie um einen additiven Term ändert.

Wir wählen nun eine ganz spezielle virtuelle Verrückung, nämlich die Biegelinie, die sich unter der Wirkung einer Einzelkraft  $P = 1$  einstellt, die im Punkt  $x$  des ursprünglichen Trägers angreift. Wir bezeichnen diese virtuelle Verrückung mit  $G$ , wie die Green'sche Funktion (= Einflussfunktion). In diesem Fall lautet das Prinzip der virtuellen Verrückung am ursprünglichen Träger

$$\delta A_i = \int_0^l EI w'' G'' dx = \int_0^l p G dx = \delta A_a. \quad (2.39)$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung gleich der Mohr'schen Arbeitsgleichung, was heißt die linke Seite dieser Gleichung liefert die Durchbiegung  $w(x)$  im Punkt  $x$

$$\delta A_i = w(x) = \int_0^l EI w'' G'' dx = \int_0^l \frac{M M_G}{EI} dx = \int_0^l p G dx. \quad (2.40)$$

Am modifizierten Träger ergibt sich mit der Substitution  $\delta w \rightarrow G$  das Ergebnis

$$\delta A_i^c = \int_0^l EI w_c'' G'' dx + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx = \int_0^l p G dx = \delta A_a^c. \quad (2.41)$$

Wegen

$$w_c(x) = \int_0^l EI w_c'' G'' dx = \int_0^l \frac{M_c M_G}{EI} dx \quad (2.42)$$

und wegen  $\delta A_a^c = \delta A_a = \delta A_i$  können wir dafür auch schreiben

$$w_c(x) + \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx = w(x) \quad (2.43)$$

oder

$$w_c(x) - w(x) = - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx. \quad (2.44)$$

Das Integral auf der rechten Seite erstreckt sich nur über den Bereich des Tragwerks, in dem sich die Streitigkeiten ändern. Anders gesagt, wir können allein durch Integration über dem modifizierten Bereich voraussagen, wie sich die Durchbiegung im Punkt  $x$  ändert, wenn sich in einem Teil des Tragwerks die Steifigkeit ändern.

Mit dieser Technik lassen sich auch alle anderen Änderungen, die Änderungen der Momente, Querkräfte, Lagerkräfte, etc. berechnen. Man muss nur die entsprechende Einflussfunktion als virtuelle Verrückung wählen.

Bei näherer Betrachtung hat die Formel 2.44 aber noch einen Nachteil, denn um die Änderung in der Durchbiegung zu berechnen, muss man die Durchbiegung  $w_c$  kennen, weil man ja die Momente aus  $w_c$  mit den Momenten aus der Greenschen Funktion überlagern muss, um die Änderung in der Durchbiegung zu berechnen. Aber wenn man  $w_c$  hat, dann braucht man die Formel nicht mehr...

Die Idee ist naheliegend die Biegelinie  $w_c$  durch die Biegelinie  $w$  anzunähern, oder genauer, anzunehmen, dass die Differenz  $w_c'' - w''$  in Intervall  $[x_1, x_2]$  orthogonal zu den Krümmungen  $G''$  der Einflussfunktion ist, denn dann folgt

$$\begin{aligned} w_c(x) - w(x) &= - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w_c'' G'' dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI (w_c'' - w'') G'' dx - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dx \end{aligned}$$

$$\simeq - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dx . \quad (2.45)$$

In dieser Formel stammen also beide Biegelinien,  $w$  und  $G$  von dem ursprünglichen Tragwerk. Mit ihr kann man prognostizieren, welchen Einfluss Steifigkeitsänderungen auf die Verformungen, die Schnittkräfte und die Lagerkräfte eines Tragwerks haben werden.

Wie man sieht, kommt man mit beiden Wegen zum gleichen Ergebnis, obwohl die Herleitungen auf unterschiedlichen Prinzipien beruhen.

## 2.3 Anwendung

Die Anwendung von der Sensitivitätsanalyse erweist sich als sehr unkompliziert. Bei der Herleitung ist deutlich geworden, dass man nur wenige Größen zur Berechnung braucht. Man sollte beachten, dass hier ein wesentlicher Unterschied zur klassischen Handhabung von den Einflussfunktionen besteht. Man benutzt für die nachfolgenden Rechnungen nicht die Einflusslinie selbst, sondern die Kräfte, die daraus resultieren.

Es gilt, dass jede Änderung der Schnittgrößen auch eine Änderung in der Dirac-Energie bedeutet. Dies lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\Delta J(u) \cdot 1 = \text{Dirac} - \text{Energie} = \int_{x_1}^{x_2} G_i(y, x) p(y) dy \quad (2.46)$$

Also erfolgt die weitere Berechnung über die Änderung der Energie.

Die Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse verläuft nach dem folgenden Schema. Allgemein gilt: Um die Änderung einer Schnittgröße zu bestimmen, überlagert man die Schnittgrößen aus dem Lastfall und aus der Einflussfunktion über den Bereich der geänderten Steifigkeit. Welche Schnittgröße zu benutzen ist, kann man folgendermaßen festlegen: Bei den hauptsächlich auf Biegung (z.B. Platten, Balken) belasteten Tragwerkselementen sind die Momente zu überlagern, und bei den Elementen, die auf Druck (z.B. Scheiben, Pendelstützen) belastet sind, überlagert man die Normalkräfte.

Nun folgt eine Beschreibung der Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse für unterschiedliche Bauteile, in denen eine Steifigkeitsänderung angenommen wird.

### Balken

Für die Bestimmung der Schnittgrößenänderung bedarf es nur weniger Werte, und sie alle können dem Ausgangssystem entnommen werden. Die Berechnung erfolgt durch die Überlagerung der Momente aus dem originalen Lastfall und der entsprechenden Green'schen Funktion über den Bereich mit der geänderten

Steifigkeit nach der Formel:

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_i}{EI} dx \quad (2.47)$$

Dabei ist  $\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x)$  die Änderung der untersuchten Schnittgröße.  $\Delta EI$  ist die Steifigkeitsänderung, die im Intervall  $[x_1, x_2]$  untersucht wird, und  $EI$  ist die Steifigkeit am originalen System.

Im Einzelnen bedeutet das angewandt auf die jeweiligen Schnittgrößen:

$$\Delta w = w_c - w \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_0}{EI} dx \quad (2.48)$$

$$\Delta w'(x) = w'_c - w' \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_1}{EI} dx \quad (2.49)$$

$$\Delta M = M_c - M \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_2}{EI} dx \quad (2.50)$$

$$\Delta V = V_c - V \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{MM_3}{EI} dx \quad (2.51)$$

## Auflager

*Änderung der Steifigkeit:*

Möchte man untersuchen, wie sich die Schnittgrößen ändern, wenn die Steifigkeit des Auflagers sich ändert, benutzt man die folgende Formel:

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq -\Delta k \cdot G_i(l, x) \cdot w(l) \quad (2.52)$$

Dabei ist  $\Delta k$  die Steifigkeitsänderung des Auflagers,  $G_i(l, x)$  ist die Durchbiegung an der zu untersuchenden Stelle  $x$  aufgrund der Belastung  $\delta_i$  und  $w(l)$  ist die Durchbiegung im Auflager mit der geänderten Steifigkeit aus dem Lastfall.

*Ausfall des Auflagers:*

Für den Fall, dass man die Änderungen der inneren Schnittgrößen bei dem Ausfall eines Lagers bestimmen möchte, kann man die Formel

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k_s} \quad (2.53)$$

benutzen. Dabei ist  $R_G$  die Auflagerreaktion aus der Green'schen Funktion,  $R_p$  ist die Auflagerreaktion aus dem Lastfall und  $k_s$  ist die Steifigkeit des Systems in die Wirkungsrichtung des ausgefallenen Auflagers.

*Steifigkeit des Lagers von dem unendlichen auf einen endlichen Wert:*

Falls die Steifigkeit eines Auflagers sich von dem unendlichen auf einen endlichen Wert abmindert, kann man die Änderungen im System mit folgender Formel bestimmen:

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = -R_G \cdot R_p \cdot \frac{1}{k} \quad (2.54)$$

Die Bedeutung der Zeichen ist die gleiche, wie auch bei der vorherigen Formel, wobei  $k$  die Reststeifigkeit des Auflagers ist.

## Rahmen

*Ausfall eines Elementes*

Für den Fall des Ausfalls eines Rahmenelementes, kann man dessen Auswirkung mit der folgenden Formel berechnen:

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) = \int_{x_1} x_2 EI w_c'' G_i dy \quad (2.55)$$

Hiermit bestimmt man die Änderung einer Schnittgröße an der Stelle  $x$ . Dabei ist  $w_c$  die Verformungsfigur des Elementes beim vollständigen Verlust der Steifigkeit und  $G_i$  ist die Einflussfunktion für die betrachtete Größe an der Stelle  $x$ . Die Überlagerung erfolgt über den gesamten Bereich des ausgefallenen Elementes.

## Scheiben

Wenn man die Auswirkungen der Steifigkeitsänderung in einem Scheibenelement untersuchen möchte, funktioniert das sehr ähnlich.

Man überlagert die Spannungen aus dem Lastfall mit den Dehnungen aus der Green'schen Funktion über den Bereich der veränderten Steifigkeit.

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}^{LF} \varepsilon_{ij}^{G_i} d\Omega \quad (2.56)$$

Dabei ist  $E$  das E-Modul des Betons und  $\Delta E$  die Änderung, deren Auswirkungen untersucht werden sollen. Hierbei ist zu beachten, dass sowohl die Spannungen  $\sigma_{ij}$  aus dem Lastfall mit den Dehnungen  $\varepsilon_{ij}$  aus der Einflussfunktion, als auch andersrum überlagert werden können. Beide Möglichkeiten liefern das gleiche Ergebnis.

Diese Formel kann man jedoch etwas modifizieren, und somit die Handhabung vereinfachen. Anstatt das Integral zu lösen, bestimmt man das Näherungsergebnis mit der Summe:

$$\simeq -\frac{\Delta E}{E} \left[ \sum (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + 2 \cdot \sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22}) \right] \cdot A_{\Omega_e} \quad (2.57)$$

Es ist noch eine weitere Vereinfachung möglich, indem man die Spannungen und Verformungen durch die Normalkräfte ersetzt. Dadurch kommt man zum folgenden Ausdruck:

$$\simeq -\frac{\Delta E}{E} \left[ \frac{1}{Ed^2} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot A_{\Omega_e} \quad (2.58)$$

## Platten

Die Untersuchung des Steifigkeitsabfalls in den Plattenelementen erfolgt nach

dem gleichen Prinzip. Man überlagert über den geänderten Bereich die Spannungen und die Verzerrungen.

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq -\frac{\Delta K}{K} \int_{\Omega_e} m_{ij}^{LF} \kappa_{ij}^{G_i} d\Omega \quad (2.59)$$

Dabei ist  $K$  die Steifigkeit der Platte,  $\Delta K$  die Änderung in dieser,  $m_{ij}$  sind die Momente und  $\kappa_{ij}$  die Krümmungen in den Elementen.  $G_i$  ist die Einflussfunktion für die Größe, deren Änderung man bestimmen möchte.

Hier ist die bei Scheiben gezeigte Vereinfachung jedenfalls sinnvoll, da der Rechenaufwand um einiges vermindert wird. Man berechnet nicht das Integral, sondern die Summe der Produkte in jedem Element:

$$\simeq -\frac{\Delta K}{K} \left[ \sum (m_{11} \cdot \kappa_{11} + 2 \cdot m_{12} \cdot \kappa_{12} + m_{22} \cdot \kappa_{22}) \right] \cdot A_{\Omega_e} \quad (2.60)$$

Auch bei den Platten gilt: Es ist nicht von Bedeutung, ob man die Momente aus dem Lastfall und die Verzerrungen aus der Green'schen Funktion nimmt, oder umgekehrt. Da es sich um die Arbeit handelt, bleibt das Ergebnis gleich.

Es gibt die Möglichkeit die Formel etwas anders darzustellen. Geht man davon aus, dass  $\kappa_{ij} = \frac{M_{ij}}{K}$ , so bekommt man den folgenden Ausdruck:

$$\partial^i w_c(x) - \partial^i w(x) \simeq -\frac{\Delta K}{K^2} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot A_{\Omega_e} \quad (2.61)$$

Wie man sieht, ist die Änderung einer Schnittgröße von drei Faktoren abhängig: Steifigkeitsabfall ( $\Delta EI$ ), und den Momenten bzw. Normalkräften aus dem Lastfall und der Einflusslinie. Das hat zur Folge, dass sich aus einer geringen Steifigkeitsänderung nur ein kleiner Unterschied in der betrachteten Weg- oder Kraftgröße ergibt. Die Momente oder Normalkräfte werden miteinander über den geänderten Bereich überlagert, sollte jedoch in einem der Lastfälle diese gering sein, so ist auch die

## 2 Sensitivitätsanalyse

Änderung klein. Es kann auch vorkommen, dass nach der Überlagerung diese sich aufheben und das Ergebnis Null wird. Diese Aspekte sind bei der Anwendung der Sensitivitätsanalyse auf jeden Fall zu beachten.

# 3 Modell

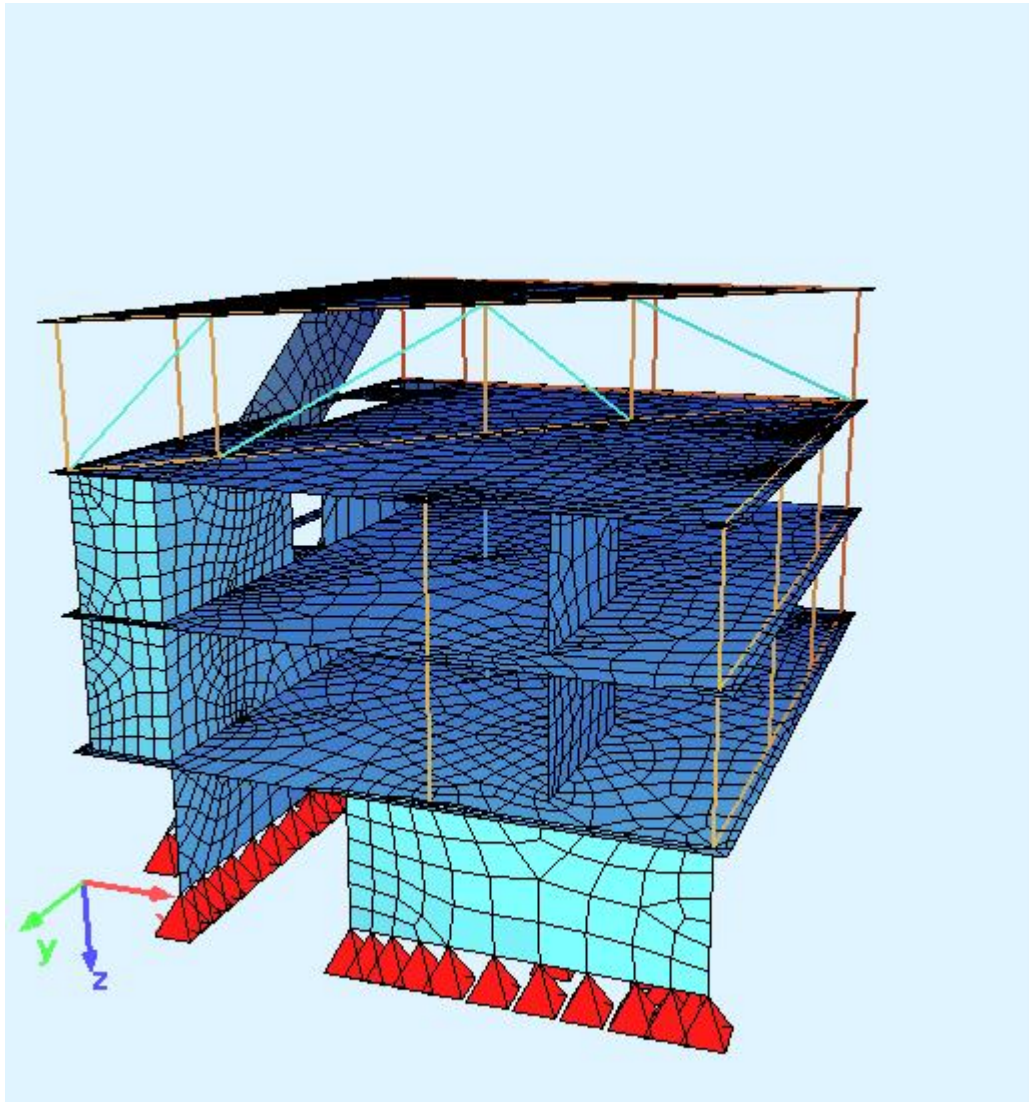
## 3.1 Allgemeine Beschreibung

Das betrachtete Modell ist ein viergeschossiges Bürogebäude aus Stahlbeton. Das Gebäude hat im Grundriss die Abmessungen von 16 x 14 m. Jedes Geschoss hat eine Höhe von 3 m, die Gesamthöhe beträgt somit 12 m. Der Grundriss des 1 und 2 OG ist rechteckig, die von EG und DG sind rechtwinklige Dreiecke, die den halben Flächeninhalt von den Regelgeschossen aufweisen. Das Besondere an diesem Gebäude ist, dass die oberen drei Geschosse zur Hälfte in der Luft schweben, d.h. sie gehen über das Erdgeschoss hinaus und werden nicht gestützt.

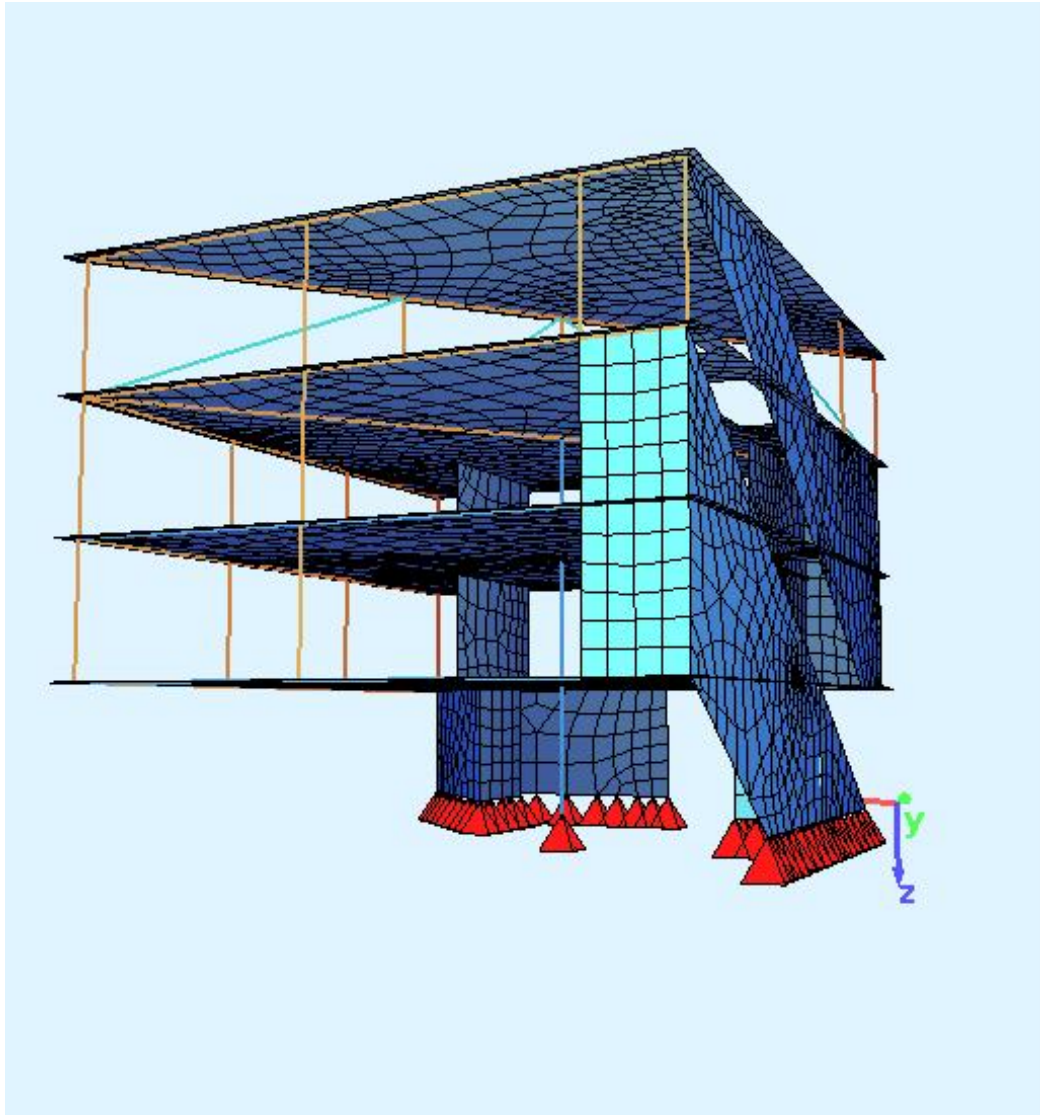
Die Decken sind in Stahlbeton C30/37 mit BSt500 Bewehrung ausgeführt. Die Dicke der Decken beträgt 30 cm. Die frei hängenden Teile der Decken im 1 und 2 OG werden als Cobiaxdecken ausgeführt, was zum Gewichtsersparnis führt, wobei die Tragfähigkeit nicht maßgebend vermindert ist. Alle Stützen und die Unterzüge werden als Verbundquerschnitte aus C40/50 und S235 ausgeführt. Die Wände sind aus Beton C30/37 in der Dicke  $d = 30$  cm. Die Zugdiagonalen im DG sind als Seile ausgeführt. Die Hauptstütze hat den Querschnitt 100 x 100 cm.

Die wesentlichen Tragelemente sind die Decken, Wände, Unterzüge und (Pendel-) Stützen. Aus diesen Bauteilen ist das Tragwerkskonzept entworfen. Diese bilden in Verbindung miteinander verschiedene Systeme.

Das Gebäude ist hauptsächlich durch innere und äußere Wände ausgesteift, die sich in den oberen Geschossen fast ausschließlich im Bereich des Treppenhauses befinden. Eine wesentliche Rolle spielt auch die Hauptstütze, die sich in der Mitte



**Abbildung 3.1:** Ansicht 1



**Abbildung 3.2:** Ansicht 2

des Gebäudes befindet und durch alle Geschosse geht. Die Geschosse sind durch zusätzliche Tragelemente ausgesteift.

Im 3. OG sind folgende Elemente zur Aussteifung angesetzt worden: Außenwand, Stützen, Unterzüge. Als wesentlich ist in diesem Geschoss das Fachwerk zu bezeichnen. Es besteht aus vertikalen Pendelstützen und den Zugdiagonalen, die als Seile ausgeführt sind. Dieses System ist von primärer Bedeutung für das Tragkonzept des Gebäudes. Vor allem sind die äußere Diagonale über dem abgehängten Teil und die Hauptstütze in der Mitte des Hauses sehr stark auf Normalkraft beansprucht. Dieses verhindert eine übermäßige Absenkung der Auskragung und leitet deren Last als Normalkraft in die Hauptstütze und die Wände. Im 1. und 2. OG ist besonders das Vierendeel-Rahmen zu erwähnen. Der Rahmen geht über zwei Geschosse und hat drei Felder. Sowohl Stützen als auch die Unterzüge sind rechteckige Verbundquerschnitte, die biegesteif aneinander angeschlossen sind. Der Vierendeel-Rahmen dient auch dem Abfangen des auskragenden Gebäudeteils. Im Gegensatz zu dem Fachwerk im obersten Geschoss, trägt der Rahmen die Belastung nicht durch die Normalkraft, sondern überwiegend durch die Biegung ab. Die größten Momente entstehen in den Stützen im Bereich der Anschlüsse.

Das Erdgeschoss wird durch Außenwände und die Hauptstütze ausgesteift.

## 3.2 Eingabe in SOFiSTiK

Hier folgt eine kurze Beschreibung der Eingabe des Modells des Bürogebäudes in SOFiSTiK. Es wird nur eine kurze Erklärung der wichtigsten Schritte und Funktionen gegeben. Die ausführliche Beschreibung findet man in den Tutorials und der Dokumentation zum Programm. Des Weiteren ist zu vermerken, dass es nur um eine beispielhafte Vorgehensweise handelt, und dass es auch andere Wege zum gewünschten Ergebnis gibt.

Die Modellierung des 3D-Modells erfolgte im Programm SOFiSTiK 23 mit dem SOFiPLUS 17.1 und AutoCAD 2008. Als Grundlage für die Eingabe dienten die Architektenpläne im AutoCAD-Format.

Die Eingabe beginnt in der Umgebung SOFiSTiK Structural Desktop (SSD). Nachdem man das Programm gestartet hat, muss man ein neues Projekt anlegen (*Datei* → *Neues Projekt*), dabei erscheint ein neues Fenster, siehe Bild 3.2, in dem man die Grundeinstellungen zum Projekt vornehmen kann. Diese sind: Name des Projektes, Datenpfad, Norm (anschließende Änderung nicht möglich), Art des Systems (hier: 3D-Flächentragwerk), Koordinatenachsen und Einheiten. Als nächstes erscheint dann im Programm SSD der Taskbaum auf der linken Seite des Fensters, Bild 3.2. Dort wird das Modell definiert. Man hat die Möglichkeit, die verwendeten Materialien und Querschnitte festzulegen. Beides kann man jedoch auch später, während der Eingabe, festlegen. Der nächste Schritt wird der Task *Grafische System- und Lasteingabe* mit einem Doppelklick geöffnet. Dann wird das Programm AutoCAD mit dem Aufsatz von SOFiSTiK SOFiPLUS gestartet. Da es in diesem Fall schon die Architektenpläne im .cad-Format in 2D schon gab, mussten diese nicht neu gezeichnet werden, ansonsten wäre dies der nächste Schritt der Eingabe.

Empfehlenswert ist es die Modellierung im Koordinatenursprung zu beginnen, um die Rechenleistung zu minimieren und die Genauigkeit zu steigern.

Mit der AutoCAD-Funktion *Kopieren mit Basispunkt* (bevorzugt ist ein Eckpunkt des Flächenelementes, der in allen Gebäudeebenen vorkommt) kopiert man ein Ge-

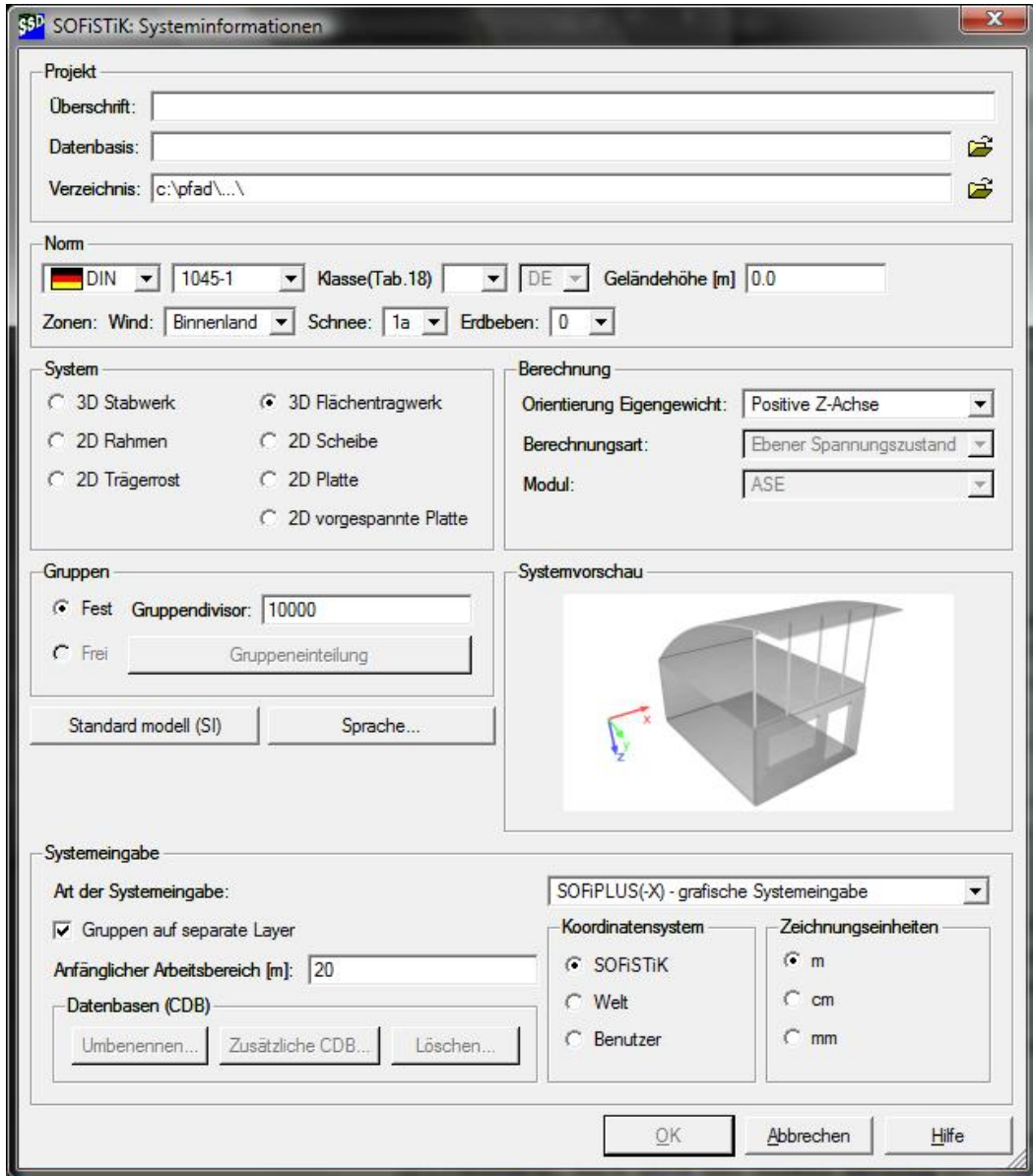


Abbildung 3.3: Neues Projekt anlegen

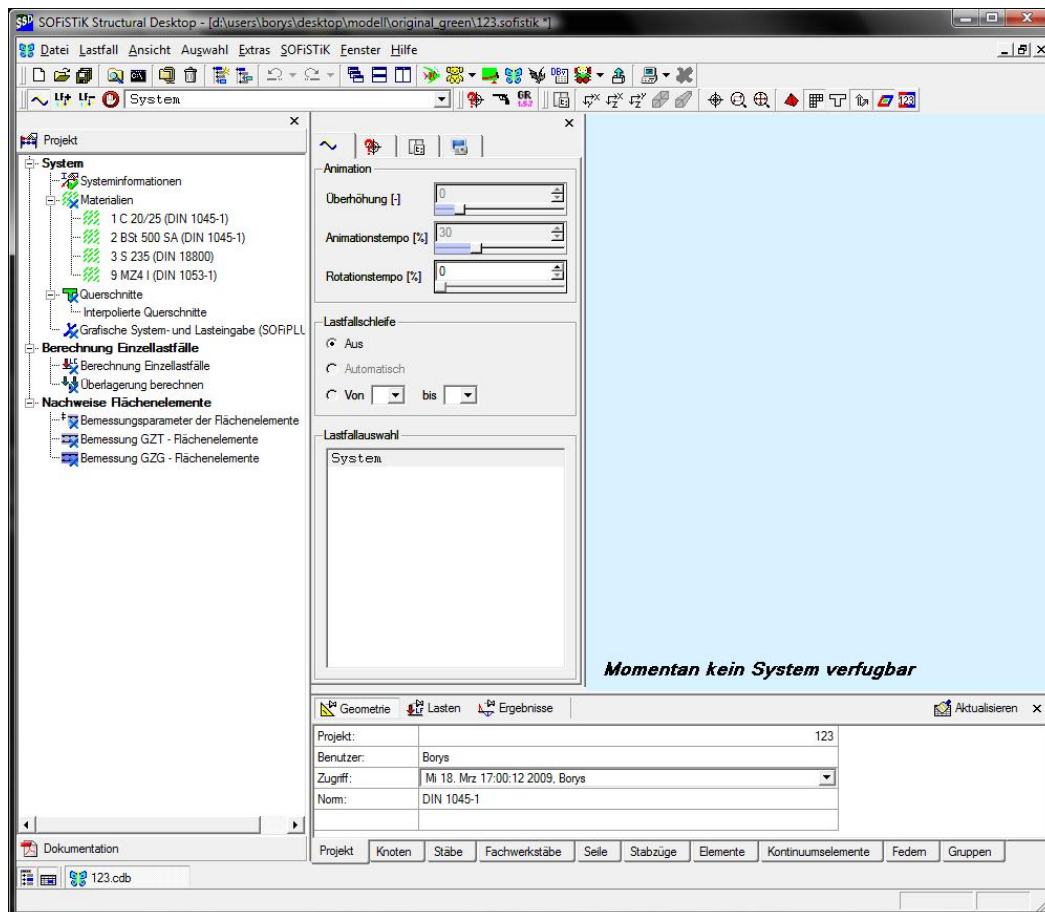
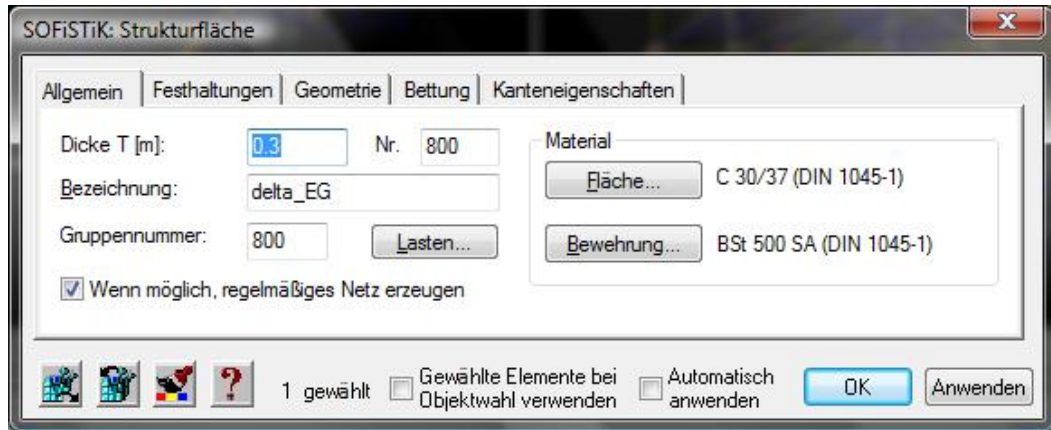


Abbildung 3.4: SSD-Oberfläche



**Abbildung 3.5:** Eigenschaften eines Flächenelementes

schoß in den Koordinatenursprung bzw. zeichnet es dort ein.

Danach definiert man die Zeichnung der Decke als ein Flächenelement, indem man auf *SOFiPLUS* → *Modell erstellen* → *Strukturfläche* geht. Dann erscheint ein neues Fenster, Bild 3.2, in dem man die Fläche beschreiben kann. Mit den Schaltflächen *Material* und *Bewehrung* definiert man die entsprechenden Eigenschaften. Desweiteren muss man die Dicke des Bauteils, die Bezeichnung und auch die Gruppen- und Elementnummern festlegen. Eine sinnvolle Einteilung der Bauteile in Gruppen und die Nummerierung ist von großer Bedeutung. Man sollte sich schon im Vorfeld überlegt haben, welche Elemente zusammenwirken und in eine Gruppe gehören. Im späteren Verlauf, z.B. bei der Bemessung, lassen sich die Gruppen ausschalten, und somit kann man die Bauteile aus der Berechnung ausschließen. Das ist sinnvoll, wenn man eine optionale Wand hat, und nicht sicher ist, ob diese für das Tragwerk erforderlich ist. Außerdem lässt sich die Ausgabe über Gruppennummern steuern. Somit kann man z.B. die Schnittkräfte in gewissen Gruppen ausgeben lassen. Daher ist es von sehr großer Bedeutung, das Tragsystem sinnvoll und nachvollziehbar in Gruppen einzuteilen, das erleichtert die spätere Arbeit am Projekt immens.

Sobald man alle nötigen Daten zum Flächenelement eingefügt hat, klickt man mit der rechten Maustaste auf das aktive AutoCAD-Fenster und es erscheint ein Dropdown-Menü, wie man die Eingabe weiterführen möchte. Man wählt eine Art

der Eingabe aus, und definiert entsprechend die geometrischen Grenzen des Trageelementes. Die Eingabe wird mit dem zweifachen Drücken der ENTER-Taste beendet. Das Element erscheint in anderer Farbe, und mit gegebener Bezeichnung auf dem Bildschirm.

Es empfiehlt sich möglichst regelmäßig die Eingabe auf Fehler zu überprüfen. Das kann man machen, indem man die Daten aus AutoCAD und SOFiPLUS in die SSD-Umgebung exportiert. Man geht auf *SOFiPLUS* → *Statikdatenbank CDB* → *Eport (.dwg->.cdb)*.... Dann erscheint ein neues Dialog-Fenster, in dem man den Exportumfang bestimmen kann, dabei wählt man die entsprechenden Elemente, und bestätigt die Eingabe mit der OK-Taste. Anschließend geht man wieder zum Fenster SSD und im rechten Teil des Fensters wird das generierte Modell dargestellt. Dort kann man optisch überprüfen, ob die Eingabe korrekt war, und auch alle Elemente als solche korrekt erkannt und generiert wurden. Die Darstellung erfolgt mit dem Modul Animator.

Als nächstes werden die Strukturpunkte und -linien definiert und mit der folgenden Funktion erstellt: *SOFiPLUS* → *Modell erstellen* → *Stütze/Strukturpunkt* bzw. *Strukturlinie*. Es erscheint ein neues Fenster, indem man nichts ändert, sondern gleich auf die Zeichenfläche in AutoCAD geht und die entsprechenden Punkte und Linien auswählt. Dieser Schritt ist für die spätere Definition der Stützen und Wände notwendig.

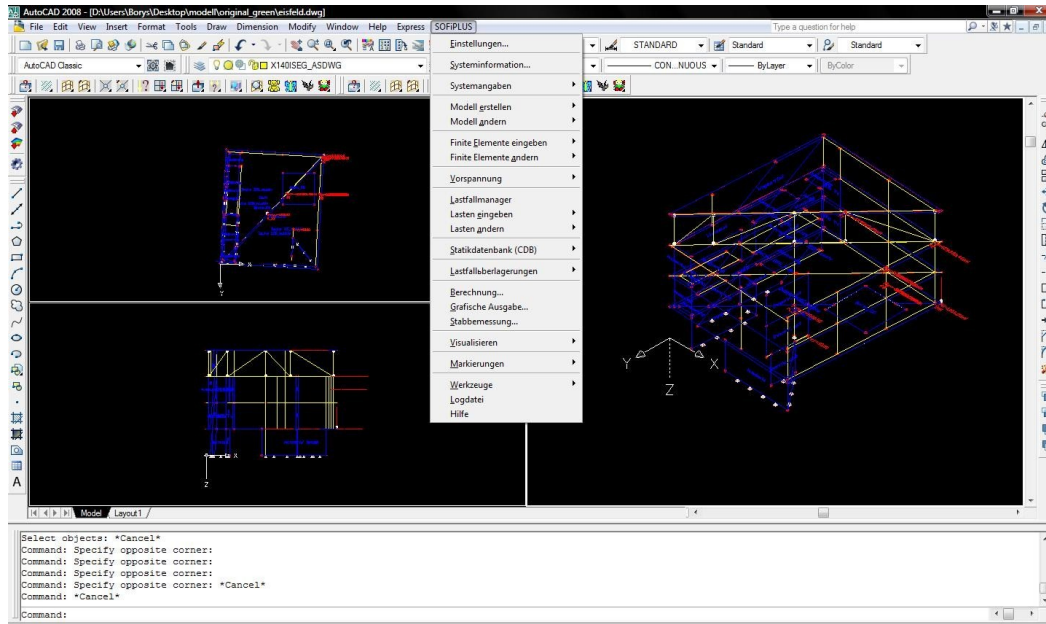
Für den Fall, dass man mit den Architektenplänen als Vorlage arbeitet, ist es empfehlenswert, einen Punkt aus den Plänen heraus zu kopieren, und ihn dann in eine weitere Ebenen zu verschieben. Es ist gelegentlich der Fall, dass die Zeichnungen nicht ganz genau sind und Abweichungen in den Koordinaten, wenn auch kleine, auftreten. Dadurch kann es dazu kommen, dass die Stützen nicht mehr vertikal sind, und die Wände eine Krümmung aufweisen. Die nachträgliche Korrektur erweist sich immer als sehr aufwendig, vor allem, wenn man schon in dem 3D-Modus arbeitet. Danach wird die Decke des nächsten Geschosses an die richtige Stelle kopiert. Dann muss man in den 3D-Modus wechseln, da die Eingabe sonst nicht mehr möglich ist. Es ist jedoch stets empfehlenswert, so lange wie möglich im 2D-Modus zu bleiben,

und möglichst viele Schritte dort zu erledigen. Eine Aufteilung des Fensters in drei Bereiche mit den Ansichten von der Seite, von oben und eine Isometrie ist hilfreich. Nachdem man die Flächenelmente erstellt hat, werden die Aussparungen mit *SOFiPLUS* → *Modell erstellen* → *Aussparung* erzeugt. Hierbei muss man beachten, dass die Eingabe nur über die Begrenzungslinien funktioniert. Die Wände werden genauso erstellt, wie die Decken. Bei den Stützen funktioniert das folgendermaßen: Man geht auf *SOFiPLUS* → *Modell erstellen* → *Strukturlinie* und dann erscheint ein Fenster, in dem man die Bezeichnung, Gruppennummer, Elementnummer eingeben kann. Unter den weiteren Tabs kann man den Querschnitt, Materialien, Anfangs- und Endgelenke festlegen. Die Erzeugung von Seilen funktioniert genauso, jedoch bei der Definition des Querschnitts muss man bedenken, dass man die Seile als ein Element vernetzen muss, denn sonst ist die grafische Darstellung fehlerhaft und es erscheinen Fehlermeldungen. Die Eingabe der Unterzüge erfolgt durch das Erstellen einer Strukturlinie mit einem entsprechenden Querschnitt.

Diese Schritte wiederholt man für alle Geschosse und erstellt somit das komplette 3D-Modell des Gebäudes.

Sobald die Eingabe der Geometrie beendet ist, und deren Richtigkeit überprüft wurde, kann man mit der Lasteingabe beginnen. Dazu geht man zunächst auf *SOFiPLUS* → *Lastfallmanager*. Dann öffnet sich ein Fenster, in dem die Lastfälle definiert werden können. Man geht zunächst auf den Tab *Einwirkungen* und drückt auf den Knopf NEU. Dort wird die Art der Einwirkung ausgewählt, und zur Liste hinzugefügt. Dann wechselt man wieder zu dem Tab *Lastfälle* und definiert den entsprechenden Lastfall. Wenn dies erledigt ist, kann man die Lasten eingeben. Das macht man, indem man auf *SOFiPLUS* → *Last eingeben* → ... geht, und die entsprechende Lastart auswählt, ob Einzellast, Flächenlast etc. Dann erscheint ein neues Fenster, in dem man die Größe und Wirkungsrichtung der Last eingeben und auch bestimmen kann, zu welchem der vordefinierten Lastfälle diese gehört.

Nachdem die Geometrie und die Lasten eingegeben wurden, exportiert man die Daten in das Programm SSD, wie das schon oben beschrieben wurde. Dort kann man die zur Bemessung erforderlichen Tasks hinzufügen und bearbeiten. Sobald alle



**Abbildung 3.6:** Eingabe in AutoCAD und SOFiPLUS

Einstellungen vorgenommen wurden, startet man die Berechnung mit *SOFiSTiK* → *Alles berechnen*. Das berechnete Modell wird in dem rechten Fenster, Bild 3.2, angezeigt, und durch das Anklicken der Elemente kann man ansehen, welche Schnittkräfte diese aufweisen. Unter 'Lastauswahl' kann man den Lastfall bzw. die Lastfallkombination auswählen, deren Ergebnisse im Animator-Fenster angezeigt werden. Wenn man die komplette Auswertung der Berechnungen angezeigt haben möchte, so benutzt man das Programm Ursula: *SOFiSTiK* → *Ergebnisse* → *Alle Ergebnisse*. Des weiteren gibt es die Möglichkeit sich die Schnittgrößen in tabellarischer Form anzeigen zu lassen. Das geht mit dem Datenbank View, dass man unter *SOFiSTiK* → *Datenbank View* findet. Dort wählt man die Art der Elemente, Gruppen, Lastfälle und die Schnittgrößen, die einen interessieren, und diese werden dann in tabellarischer Form dargestellt.

### 3 Modell

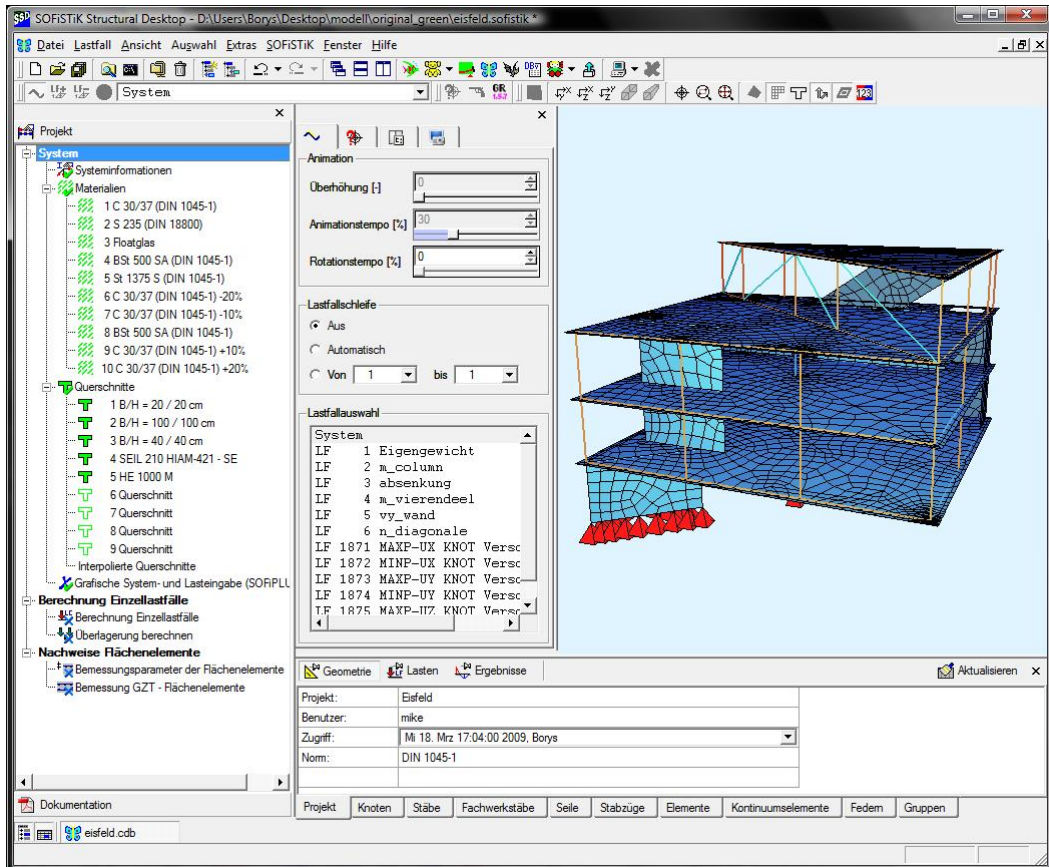


Abbildung 3.7: Berechnetes System

## 4 Numerische Ergebnisse

### 4.1 Fehleranalyse

Als erster Schritt sollte eine gründliche Analyse des Tragwerkes und dessen Verhalten erfolgen, um die Schwachstellen und die stark beanspruchten Bauteile in dem Tragsystem zu kennen. Hierbei ist die Art der Beanspruchung für die weitere Untersuchung sehr wichtig. Erst dann ist ein sinnvoller und effizienter Umgang mit der Sensitivitätsanalyse möglich.

Die möglichen Fehlerquellen liegen in den unterschiedlichen Planungs- und Ausführungsstadien.

Bei der Planung ist es möglich, dass die Lastannahmen falsch getroffen bzw. nicht alle Lastfälle oder Lastkombinationen berücksichtigt wurden. Dadurch könnten die Querschnitte unterbemessen sein und das Gebäude würde seine Funktion nicht mehr fehlerfrei erfüllen. Auch durch die unterlassene Betrachtung der Rissbildung in Beton und daraus folgender Steifigkeitsabminderung kann es zu Beeinträchtigungen des Tragverhaltens und zu einer größeren Beanspruchung anderer wesentlicher Tragwerksteile kommen.

Ein großes Fehlerpotenzial hat die Phase der Ausführung. Die Verwendung falscher Baustoffe, Profile, nicht ausreichender Vor- und Nachbehandlung von Beton, was zur verschlechterten Eigenschaften des Baustoffes führt, kann die Tragfähigkeit des Bauwerks mindern bzw. zur erhöhten Beanspruchung anderer Bauteile führen. Auch durch Fahrlässigkeit und Inkompetenz der Bauarbeiter bzw. der ausführenden Firmen kann es zur Fehlerbildung kommen, z.B. in dem Verlegen der Bewehrung oder

bei der Ausbildung von Anschlüssen.

Mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse kann man die Auswirkung dieser Fehler und deren Quellen abschätzen. Mit diesem Verfahren gewinnt man Erkenntnis über die kritischen Stellen am Tragwerk und kann die Zusammenhänge und die Wechselwirkungen/Abhängigkeiten im Tragverhalten deutlich erkennen und sogar einen Wert für den Maß der Auswirkung bekommen. Somit kann man erkennen, welche der kritischen Punkte, bei denen ein Fehlerpotenzial besteht, auf die stark beanspruchten Bauteile Einfluss haben.

In dem betrachteten Modell sind folgende Bauteile als besonders kritisch einzustufen: die Diagonalen im Dachgeschoss, die Hauptstütze und das Vierendeel-Rahmen. Des Weiteren sind die Decken im Bereich der Innenwände und der Hauptstütze stark beansprucht.

Es gilt festzustellen, welche Fehler bei diesem Projekt auftreten können und welche Auswirkung diese mit sich tragen könnten.

Dadurch, dass es sich bei den Stabelementen um Fertigteile handelt, kann man davon ausgehen, dass die Eigenschaften dieser Bauteile den Voraussetzungen entsprechen. Man kann mit hoher Sicherheit annehmen, dass die Materialeigenschaften unbeeinträchtigt bleiben. Die Anschlüsse dieser Fertigteile haben jedoch ein sehr hohes Fehlerpotenzial. Vor allem die Ausführung des Fachwerks erfordert besondere Beachtung, da die Bauteile stark beansprucht sind und eine zentrale Rolle im Tragkonzept spielen. Eine sorgfältige Detailplanung und Ausführung der Anschlüsse ist unbedingt sicherzustellen.

Das weitere bedeutende Tragsystem des Modells ist der Vierendeel-Rahmen. Ähnlich, wie das Fachwerk des Dachgeschosses, wird er aus Fertigteilen hergestellt, und die Qualität der verwendeten Materialien kann als gegeben angenommen werden. Hier ist auch die Ausbildung der Anschlüsse als kritisch zu bewerten. Der Grund dafür ist, dass hier die Verbindung von Stützen und Unterzügen biegesteif sein soll. Deswegen ist das Fehlerpotenzial hier als sehr hoch einzustufen. Erschwerend kommt hinzu, dass der Vierendeel-Rahmen eine wesentliche Rolle am Aussteifungssystem des Bauwerks spielt.

Ein weiteres bedeutendes Bauteil ist die Hauptstütze. Sie wird in Ortbeton hergestellt. Dadurch muss die erforderliche Betonqualität sichergestellt sein und auch die Bewehrung muss gemäß den Anforderungen in Menge, Lage und Qualität entsprechen. Die nötige Nachbehandlung des Betons muss gegeben sein. Aufgrund der starken Beanspruchung ist diesem Bauelement auch bei der Planung und der Bemessung besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Die Beeinträchtigung im Tragverhalten der Hauptstütze kann zu weitreichenden Folgen im Tragwerk führen, deswegen ist das Fehlerpotenzial auch hier als hoch einzuschätzen.

Bei den Decken sind zwei Sachen besonders zu beachten. Durch die Rissbildung wird die Tragfähigkeit der Decken abgemindert. Dies kann zur erhöhten Beanspruchung anderer Bauteile führen und die Decke selbst weist dementsprechend höhere Ausnutzungsgrade auf. Die Verformung der Decke wird auch vergrößert. Des Weiteren ist die Durchstanzbewehrung zu beachten. An einigen Stellen, z.B. Wandenden und unter den Stützen im Bereich des Treppenhauses, ist die Beanspruchung groß. Man muss sicherstellen, die maßgebende Lastkombination betrachtet zu haben. In beiden Fällen muss die korrekte Bewehrungsmenge und -führung überprüft werden.

Ein großes Problem stellt oft die Gründung dar, das durch die Streuung der Bodenkennwerte verursacht wird. Durch falsche Annahmen können unvorhergesehene Absenkungen auftreten, deren Auswirkung das Tragwerk stark beanspruchen kann. Im Fall des vorliegenden Modells wäre die Stützenabsenkung von großer Bedeutung. Dies würde zur Erhöhung der Verformung an der Auskrägung führen. Das Fehlerpotenzial ist recht hoch, und die Auswirkungen wären massiv.

Im nächsten Kapitel werden einige der oben beschriebenen Stellen mit dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse untersucht.

## 4.2 Berechnungen

In den folgenden Berechnungen wird der Lastfall Eigengewicht untersucht. Es wird zunächst die Änderung der Schnittgröße mit dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse berechnet und anschließend mit dem genauen Ergebnis verglichen. So ist die Aussage über die Genauigkeit des Näherungsverfahrens möglich.

In den Bildern 4.2 und 4.2 sieht man die Verformungsfigur unter der Eigenlast, woraus die Beanspruchung der Tragwerkselemente entnommen werden kann.

### 4.2.1 Beispiel 1

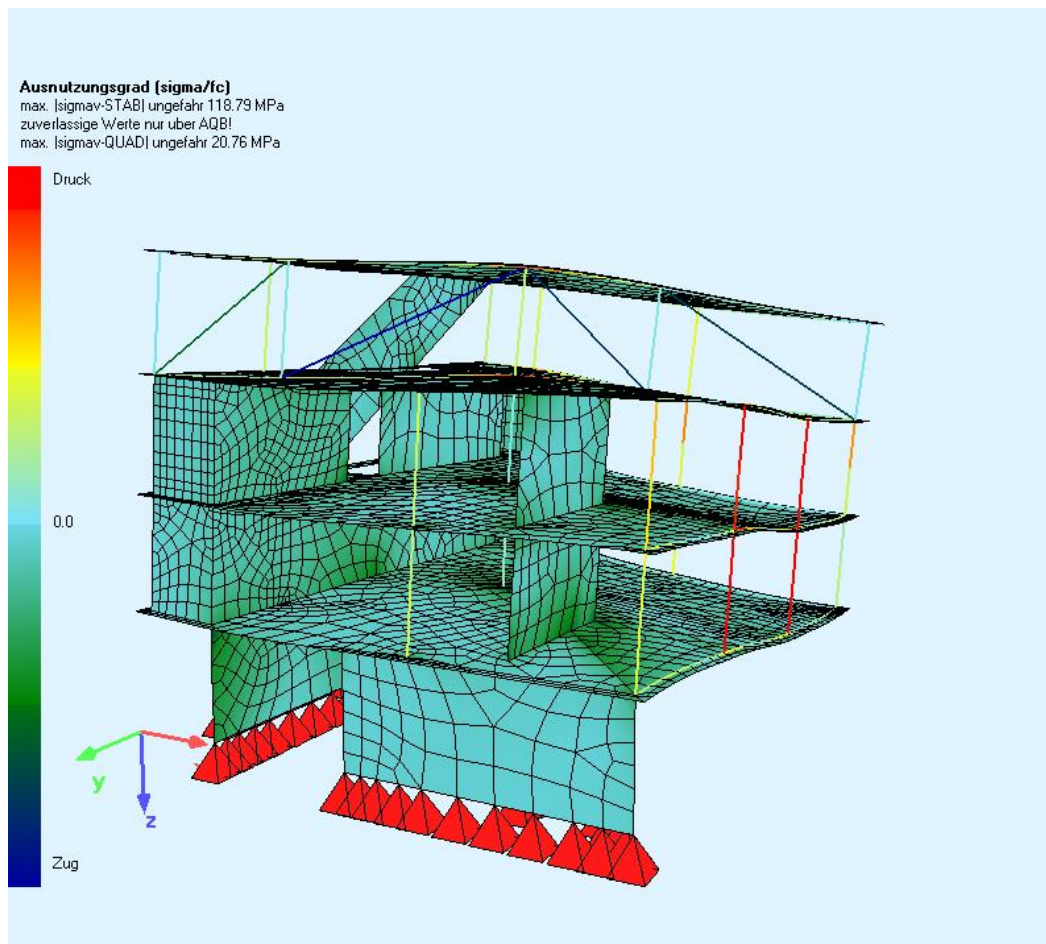
Es wird angenommen, dass die Steifigkeit eines Teils der Decke über dem 1. OG im Bereich der Auskragung abnimmt. Es werden die Verminderungen des E-Moduls um 20%, 40% und 60% untersucht. Die betrachtete Decke ist in Beton C30/37 nach DIN 1045-1 ausgeführt, deren E-Modul beträgt  $E = 28309400kN/m^2$ .

Zunächst wird der Einfluss der Steifigkeitsänderung auf das Moment  $M_y$  in der Stütze des Vierendeel-Rahmens im 3. OG untersucht. Um die Änderung zu bestimmen, muss man die Momente aus dem Lastfall 'Eigengewicht' mit den Momenten aus der Green'schen Funktion über den geänderten Bereich nach der Gl. 2.61 überlagern.

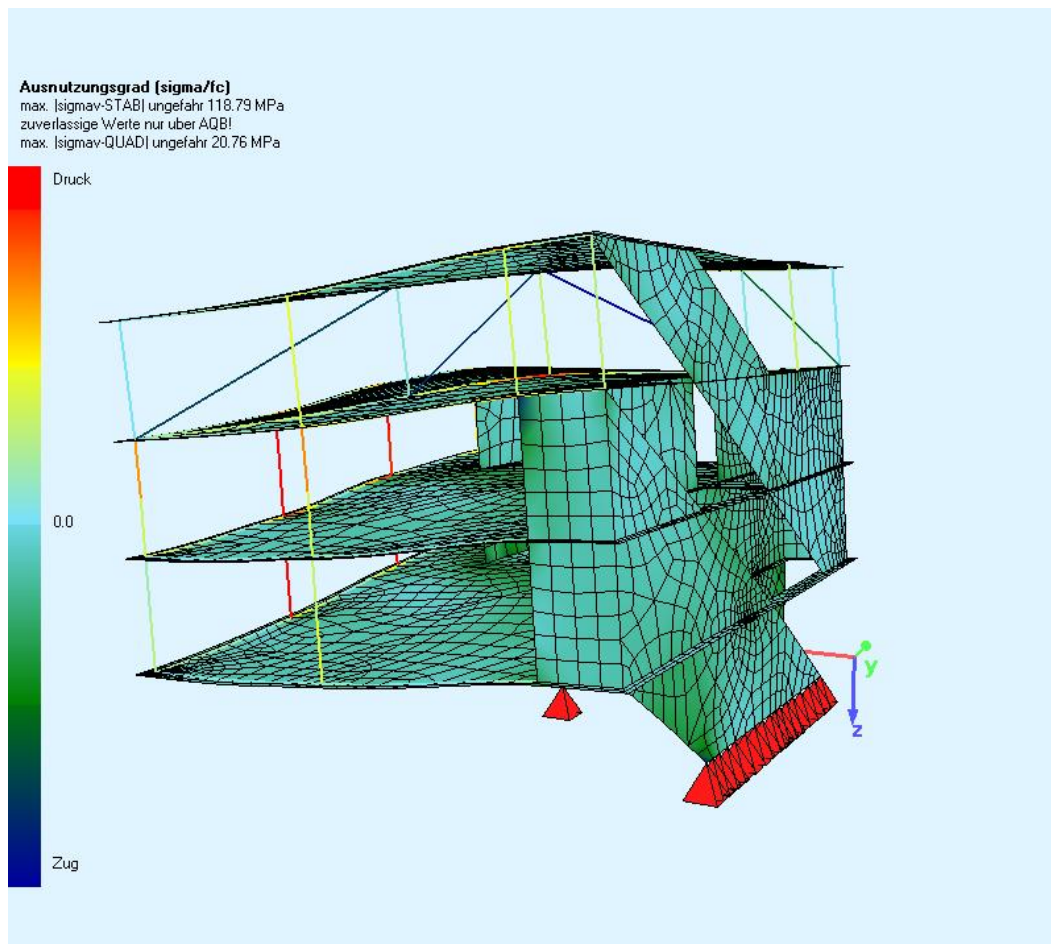
Dazu muss man die Green'sche Funktion für das Moment an der betrachteten Stelle erstellen. SOFiSTiK bietet diese Möglichkeit nur für die Flächenelemente, daher muss man sich eines alternativen Weges bedienen, um diese zu erzeugen. Das kann man über die äquivalenten Knotenkräfte lösen. Man leitet die Einheitsverformungen  $\varphi_i$  ab, und durch das Einsetzen der Länge des finiten Elementes  $l$  und der Stelle  $x$ , an der die Einflussfunktion erzeugt werden soll, bekommt man die entsprechenden Kräfte  $p_i$ , die man in den Anfangs- und Endknoten des finiten Elementes einsetzen soll.

Die Einheitsverformungen für den Balken lauten wie folgt:

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.1)$$



**Abbildung 4.1:** Lastfall Eingewicht, Ansicht 1



**Abbildung 4.2:** Lastfall Eingengewicht, Ansicht 2

$$\varphi_2(x) = -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (4.2)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.3)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (4.4)$$

Aus der Formel zur Bestimmung der negativen Festhaltekräfte

$$p_i = \int_0^l \varphi_i(x)p(x)dx \quad (4.5)$$

kann man durch das Ableiten der Einheitsverformungen die äquivalenten Knotenkräfte die Einflussfunktionen bestimmen.

Durchbiegung  $w$ :

$$p_1 = \varphi_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.6)$$

$$p_2 = \varphi_2 = -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (4.7)$$

$$p_3 = \varphi_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.8)$$

$$p_4 = \varphi_4 = \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (4.9)$$

Verdrehung  $w'$ :

$$p_1 = \varphi'_1 = -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} \quad (4.10)$$

$$p_2 = \varphi'_2 = -1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \quad (4.11)$$

$$p_3 = \varphi'_3 = \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \quad (4.12)$$

$$p_4 = \varphi'_4 = \frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \quad (4.13)$$

Moment  $w'' = M$ :

$$p_1 = \varphi''_1 = EI\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \quad (4.14)$$

$$p_2 = \varphi''_2 = EI\left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) \quad (4.15)$$

$$p_3 = \varphi_3'' = EI\left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) \quad (4.16)$$

$$p_4 = \varphi_4'' = EI\left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) \quad (4.17)$$

Querkraft  $w''' = V$ :

$$p_1 = \varphi_1''' = EI\left(-\frac{12}{l^2}\right) \quad (4.18)$$

$$p_2 = \varphi_2''' = EI\left(\frac{6}{l^2}\right) \quad (4.19)$$

$$p_3 = \varphi_3''' = EI\left(\frac{12}{l^3}\right) \quad (4.20)$$

$$p_4 = \varphi_4''' = EI\left(\frac{6}{l^2}\right) \quad (4.21)$$

Setzt man in die Gleichungen 4.14, 4.15, 4.16 und 4.17 die Werte für das betrachtete Element:  $l = 1,5m$ ,  $x = 0$  (im Anschluss der Stütze an den Unterzug) und  $EI = 148575kNm^2$  ein, so erhält man folgende Kräfte, die die nötige Einflussfunktion erzeugen:

$$f_1 = 396200kN$$

$$f_2 = -396200kNm$$

$$f_3 = -396200kN$$

$$f_4 = -198100kNm$$

Nachdem die Einflussfunktion erzeugt ist, kann man die Änderung des Momentes im Balken bestimmen. Dazu verwendet man die Formel

$$\Delta M \simeq -\frac{\Delta K}{K^2} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot A_{\Omega_e}.$$

Die Plattensteifigkeit  $K$  wird bestimmt mit:

$$K = \frac{Eh^3b}{12(1-\nu^2)} = \frac{210000000 \cdot 0,30^3 \cdot 1}{12(1-0,2^2)} = 492187,5kNm^2$$

Da es sich um die Änderung des E-Moduls handelt, kann man den Term  $K =$

$\frac{Eh^3b}{12(1-\nu^2)}$  in dem Ausdruck  $\frac{\Delta K}{K}$  auf  $\frac{\Delta E}{E}$  reduzieren, da außer  $E$  alle Werte gleich bleiben und sich herauskürzen. Aus der Definition für das  $\Delta EI$

$$E_c = E + \Delta E \quad (4.22)$$

folgt für die Abminderung der Steifigkeit um 60%, 40% und 20% entsprechend:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-0,6 \cdot E}{E} = -0,6$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-0,4 \cdot E}{E} = -0,4$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-0,2 \cdot E}{E} = -0,2$$

Für die Fläche setzt man die mittlere Fläche des Elementes ein. Diese entspricht:

$$A_{\Omega_e} = \frac{20,25}{48} = 0,421875m^2$$

Dabei ist die Fläche des geänderten Bereiches  $20,25m^2$  und 48 ist die Anzahl der finiten Elemente.

Mit diesen Ausgangsgrößen bekommt man mit dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse die Änderungen des Momentes in dem Rahmenstiel für den Abfall der Steifigkeit um 60%:

$$\Delta M \simeq -\frac{-0,6}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = -5,68kNm$$

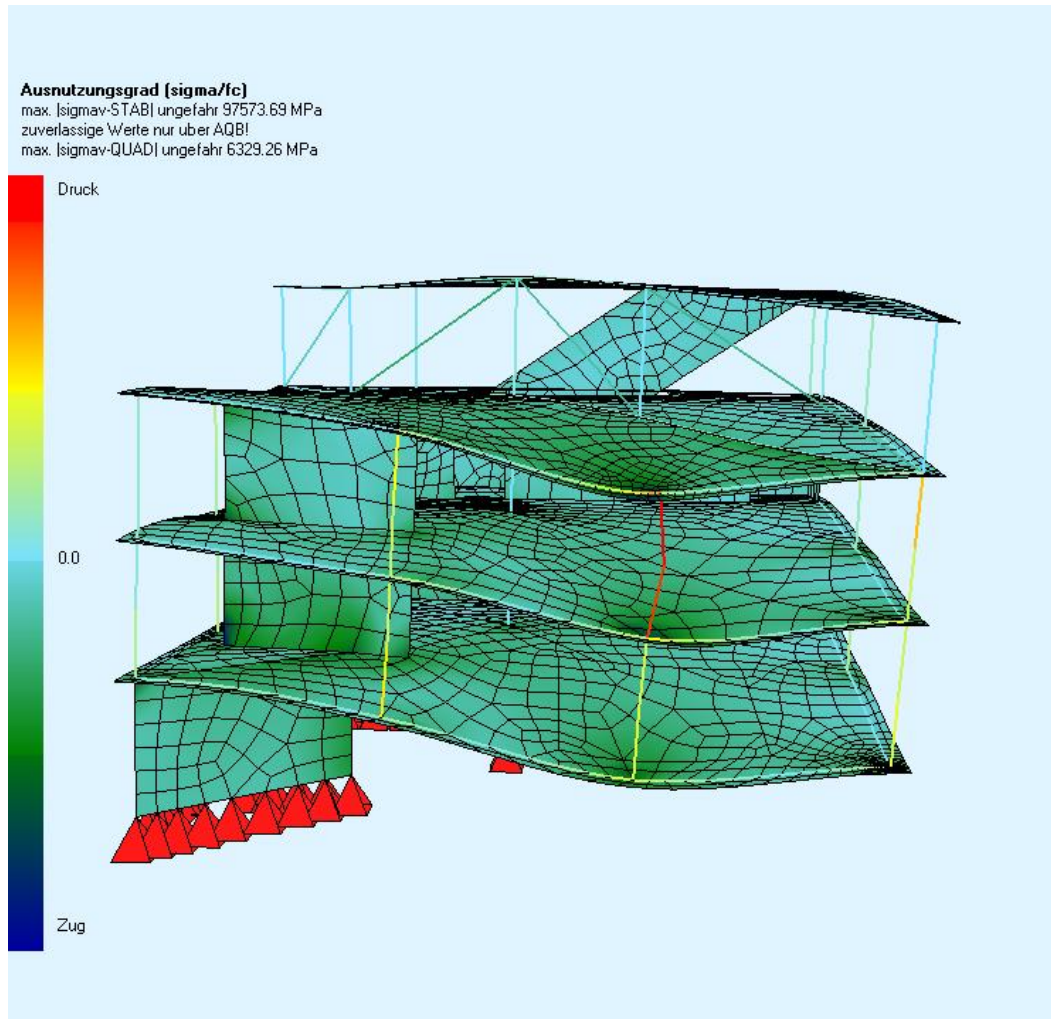
um 40%:

$$\Delta M \simeq -\frac{-0,4}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = -3,79kNm$$

und um 20%:

$$\Delta M \simeq -\frac{-0,2}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = -1,89kNm$$

#### 4 Numerische Ergebnisse



**Abbildung 4.3:** Einflussfunktion für das Moment  $M_y$  in der Stütze des Vierendeel-Rahmens

Die Werte für die Momente aus dem Lastfall 'Eingengewicht' und aus der Green'schen Funktion bekommt man aus dem Programm. Die Verformungsfigur des Tragwerks aus der Einflussfunktion ist im Bild 4.2.1 dargestellt.

In der Tabelle 4.1 ist die Gegenüberstellung der Ergebnisse mit dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse und der exakten Werte aufgeführt. Wie man sieht, ist die Abweichung vom exakten Wert sehr gering. Sie beträgt in diesem Fall maximal

$$\frac{|-4,9|}{262,94} = 0,0186.$$

**Tabelle 4.1:** Vergleich der Ergebnisse

$M_{orig}$ [kNm]	$\Delta E$ [%]	$\Delta M$ [kNm]	$M_c$ [kNm]	$M_c^{exakt}$ [kNm]	$M_c - M_c^{exakt}$ [kNm]
263,72	-60%	-5,68	258,04	262,94	-4,90
263,72	-40%	-3,79	259,93	263,04	-3,11
263,72	-20%	-1,89	261,83	263,18	-1,35

Das entspricht einer Ungenauigkeit von  $< 2\%$  bei dem Steifigkeitsabfall von 60%.

Bei geringeren Steifigkeitsänderungen ist auch der Unterschied geringer, teilweise unter 1%.

### 4.2.2 Beispiel 2

In diesem Beispiel wird die Änderung des Momentes  $m_{yy}$  in der Decke des 1 OG unter der Hauptstütze untersucht. Die Steifigkeitsänderung ist die gleiche wie im vorherigen Beispiel: eine Schwächung von 60%, 40% und 20% im Bereich der Auskragung in der Decke des 1 OG.

Die Abschätzung der Änderung erfolgt mittels der Überlagerung der Momente aus dem Lastfall 'Eigengewicht' und der Green'schen Funktion über den geänderten Bereich. Die Verformungsfigur unter der Eigenlast ist in den Bildern 4.2 und 4.2, und die Einflusslinie für das Moment  $m_{yy}$  ist im Bild 4.2.2 dargestellt.

Die Erzeugung der Einflussfunktion für die Flächenelemente ist in SOFiSTiK einfacher, als für die Stabelemente, da die Befehle schon vordefiniert sind. Man gibt eine freie Einzellast ein, wählt als Lastart die Einflussfunktion aus, und zeigt anschließend den Angriffspunkt an.

Die Formel, mit der man die Änderung des Momentes bestimmt, lautet:

$$\Delta m_{yy} \simeq -\frac{\Delta K}{K^2} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot A_{\Omega_e}.$$

Wie auch im vorherigen Beispiel beträgt die Fläche  $A_{\Omega_e} = 0,421875m^2$  und der Ausdruck  $\frac{\Delta K}{K^2} = \frac{\Delta E}{EK}$ .

Man erhält folgende Gleichungen für die Abminderung von 60%:

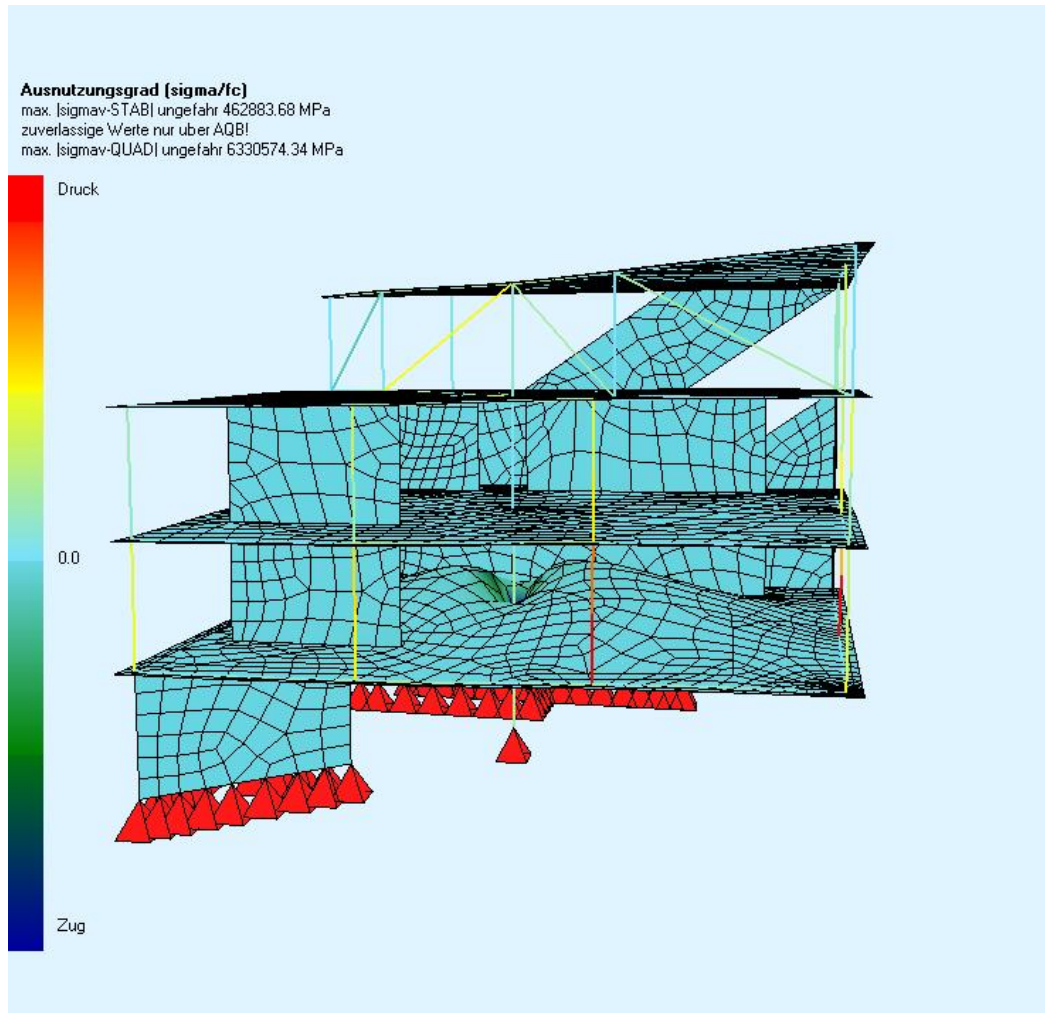
$$\Delta m_{yy} \simeq -\frac{-0,6}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = 0,08kNm$$

von 40%:

$$\Delta m_{yy} \simeq -\frac{-0,4}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = 0,05kNm$$

und von 20%:

$$\Delta m_{yy} \simeq -\frac{-0,2}{492187,5} \left[ \sum (m_{11}^{LF} \cdot m_{11}^G + 2 \cdot m_{12}^{LF} \cdot m_{12}^G + m_{22}^{LF} \cdot m_{22}^G) \right] \cdot 0,421875 = 0,03kNm$$



**Abbildung 4.4:** Einflussfunktion für das Moment  $m_{yy}$  in der Decke des 1 OG

**Tabelle 4.2:** Vergleich der Ergebnisse für das Moment  $m_{yy}$ 

$m_{orig}$ [kNm]	$\Delta E$ [%]	$\Delta m$ [kNm]	$m_c$ [kNm]	$m_c^{exakt}$ [kNm]	$m_c - m_c^{exakt}$ [kNm]
-119,10	-60%	-0,08	-119,18	-119,16	-0,02
-119,10	-40%	-0,05	-119,15	-119,14	-0,01
-119,10	-20%	-0,03	-119,13	-119,12	-0,01

Die Ergebnisse werden mit der genauen Lösung in der Tabelle 4.5 gegenübergestellt.

Die Abweichung von den exakten Ergebnissen ist in diesem Beispiel sehr gering.

$$\frac{-0,02}{-119,16} = 0,0002$$

Die Differenz beträgt hier weniger als 0,02%.

In diesem Fall war der Einfluss der Systemschwächung auf die betrachtete Kraftgröße sehr gering. Obwohl die gleiche Steifigkeitsänderung wie im vorherigen Beispiel angenommen wurde, und auch die Momente aus dem Lastfall 'Eigengewicht' sind unverändert geblieben. Diese Berechnung zeigt sehr deutlich, dass die Änderung in den Schnittgrößen von allen Faktoren stark abhängig ist, und nur wenn sowohl die Steifigkeitsänderung, als auch die Momente aus dem Lastfall und der Green'sche Funktion groß sind und sich bei der Überlagerung nicht aufheben, resultieren nennenswerte Änderungen in den betrachteten Größen.

### 4.2.3 Beispiel 3

Es wird der Einfluss auf die Normalkraft in der Hauptstütze untersucht. Diese hat den Querschnitt  $1,00 \times 1,00m$  und ist in Beton C 30/37 ausgeführt. Sie ist stark auf Normalkraft belastet.

Die Einflussfunktion für die Normalkraft in der Stütze muss ähnlich wie in dem Beispiel 1 über die Einheitsverformungen  $\varphi_i$  hergeleitet werden, aus denen man die äquivalenten Knotenkräfte  $p_i$  bestimmt.

Die Einheitsverformungen für den Stab lauten:

$$\varphi_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad (4.23)$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{l}. \quad (4.24)$$

Die äquivalenten Knotenkräfte berechnet man mit der Formel:

$$p_i = \int_0^l \varphi_i(x)p(x)dx.$$

Somit erhält man für die Einflusslinie für  $w$ :

$$p_1 = \varphi_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad (4.25)$$

$$p_2 = \varphi_2 = \frac{x}{l} \quad (4.26)$$

und für  $w' = N$ :

$$p_1 = \varphi_1' = -EA\frac{1}{l} \quad (4.27)$$

$$p_2 = \varphi_2' = EA\frac{1}{l} \quad (4.28)$$

Der betrachtete Querschnitt hat die Fläche  $A = 1m^2$ , das E-Modul  $E = 28309400kN/m^2$  und die Länge des finiten Elementes beträgt  $l = 1,5m$ . Man setzt diese Werte in die Gleichungen 4.27 und 4.28 und bekommt die Kräfte, die man in den Anfangs- und Endknoten des betrachteten Elementes einsetzen muss, um die

Einflussfunktion für die Normalkraft zu erzeugen. Diese Kräfte sind gleich:

$$p_1 = \varphi'_1 = -EA \frac{1}{l} = -28309400 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1,5} = -18872933,33kN$$

$$p_2 = \varphi'_2 = EA \frac{1}{l} = 28309400 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1,5} = 18872933,33kN$$

Durch das Aufbringen der Kräfte  $p_i$  auf den Anfangs- und Endknoten des finiten Elementes, entsteht die Einflussfunktion für die Normalkraft in der Stütze, die im Bild 4.2.3 zu sehen ist.

Es wird die Änderung der Steifigkeit in der Wand des 1 Obergeschosses in ihrem Einfluss auf die Belastung der Hauptstütze untersucht. Es wird eine Abminderung von dem E-Modul  $E$  in dem Wandelement um 60%, 40% und 20% angenommen.

Die Berechnung erfolgt nach der Formel 2.58:

$$\Delta N \simeq -\frac{\Delta E}{E} \left[ \frac{1}{Ed^2} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot A_{\Omega_e}$$

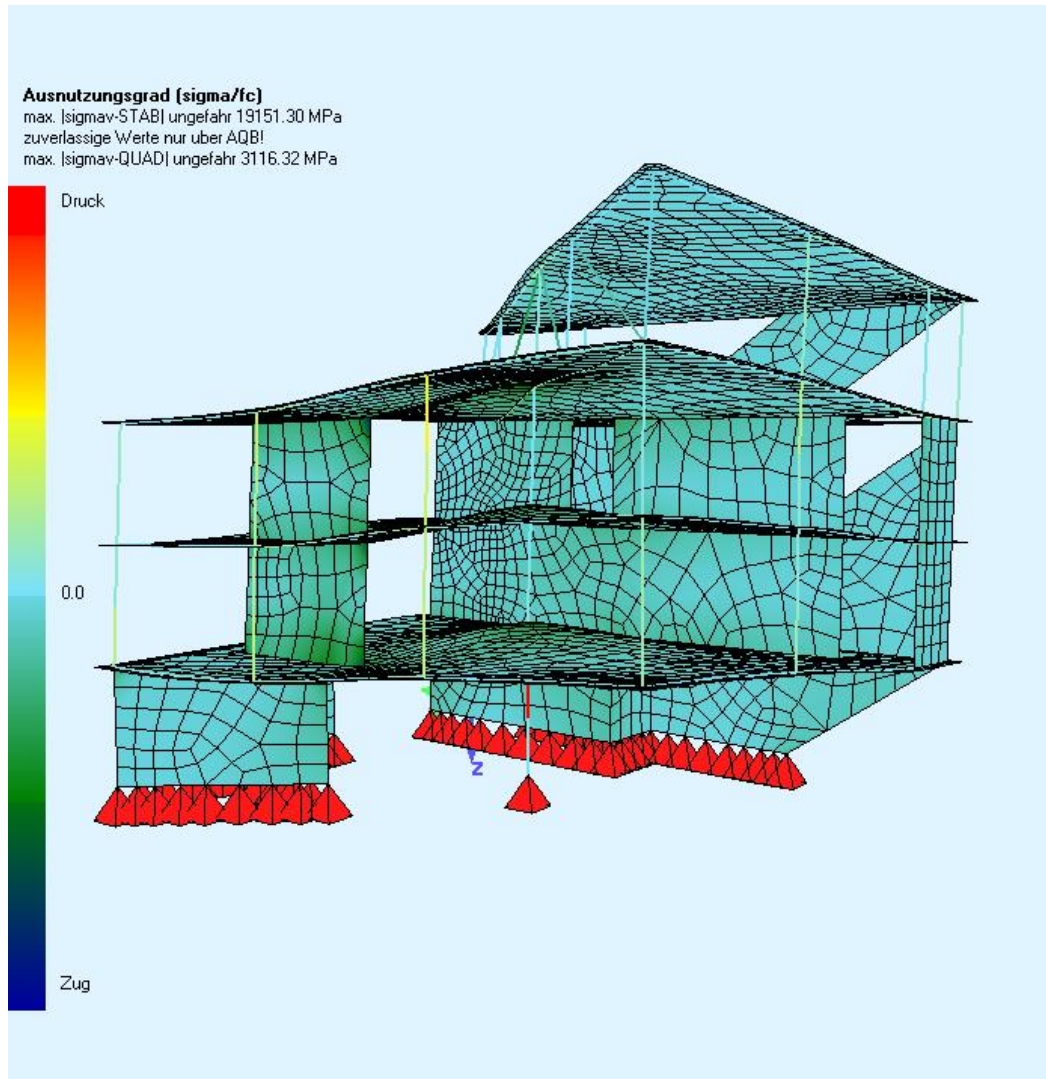
Für  $A_{\Omega_e}$  wird die mittlere Fläche des Elementes angenommen, und beträgt  $A_{\Omega_e=0,15m^2}$ , die Dicke der Wandscheibe  $d$  ist gleich  $0,30m$  und das E-Modul  $E$  ist gleich  $28309400kN/m^2$ . Die Normalkräfte werden dem Lastfall 'Eigengewicht' und der Einflussfunktion entnommen. Wie schon in den vorherigem Beispiel gezeigt worden ist, kann man für den Ausdruck  $\frac{\Delta E}{E}$  die entsprechenden Steifigkeitsabminderungen  $-0,6$ ,  $-0,4$  und  $-0,2$  einsetzen.

Mit diesen Randbedingungen kommt man auf den folgenden Ausdruck, mit dem man die Änderung der Normalkraft bestimmen kann. Für eine Schwächung der Wand um 60%:

$$\Delta N \simeq 0,6 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,15 = -85,50kN$$

für eine Schwächung von 40%:

$$\Delta N \simeq 0,4 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,15 = -57,00kN$$



**Abbildung 4.5:** Einflussfunktion für die Normalkraft in der Hauptstütze

**Tabelle 4.3:** Vergleich der Ergebnisse

$N_{orig}$ [kN]	$\Delta E$ [%]	$\Delta N$ [kN]	$N_c$ [kN]	$N_c^{exakt}$ [kN]	$N_c - N_c^{exakt}$ [kN]
-3555,60	-60%	-85,50	-3641,10	-3642,50	1,40
-3555,60	-40%	-57,00	-3612,60	-3603,00	9,60
-3555,60	-20%	-28,50	-3584,10	-3577,30	6,80

und für eine Schwächung von 20%:

$$\Delta N \simeq 0,2 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,15 = -28,50 \text{ kN}$$

Diese Ergebnisse wurden mit den exakten Werten verglichen, und eine Zusammenstellung ist in der Tabelle 4.3 aufgeführt.

Die maximale Abweichung bei der Sensitivitätsanalyse beträgt:

$$\frac{61,25}{3642,5} = 0,00266.$$

Die Ungenauigkeit des Näherungsverfahrens der Sensitivitätsanalyse beträgt somit weniger als 0,2%, bei dem Steifigkeitsabfall von 40%. Bei den Abminderungen des E-Moduls um 60% und 20% ist diese noch geringer.

**Tabelle 4.4:** Vergleich der Ergebnisse

$N_{orig}$ [kN]	$\Delta E$ [%]	$\Delta N$ [kN]	$N_c$ [kN]	$N_c^{exakt}$ [kN]	$N_c - N_c^{exakt}$ [kN]
-3555,60	-60%	-3,10	-3558,70	-3560,10	1,40
-3555,60	-40%	-2,07	-3557,67	-3559,70	2,03
-3555,60	-20%	-1,03	-3556,63	-3559,20	2,57

#### 4.2.4 Beispiel 4

In diesem Beispiel, wie auch im vorherigen, wird die Änderung der Normalkraft in der Hauptstütze untersucht. Die Steifigkeitsänderung erfolgt in der Außenwand des 3. Obergeschosses. Diese hat die Höhe von  $h = 3m$ , Breite  $b = 2m$  und die Dicke  $d = 0,3m$ . Sie ist aus Beton C30/37 mit dem E-Modul  $E = 28309400kN/m^2$  ausgeführt. Das Wandelement ist in 80 finite Elemente mit einer mittleren Querschnittsfläche  $A_{\Omega_e} = 0,075m^2$  aufgeteilt.

Die Verformungsfigur aus dem Lastfall 'Eigengewicht' und die Einflusslinie für die Normalkraft in der Hauptstütze sind in den Bildern 4.2, 4.2 und 4.2.3 dargestellt.

Die Abminderung der Steifigkeit erfolgt über die Reduzierung des E-Moduls des Betons um 60%, 40% und 20%.

Unter der Beachtung der Randbedingungen in der Formel 2.58 bekommt man für die entsprechenden Systemschwächungen folgende Gleichungen:

für eine Schwächung von 60%:

$$\Delta N \simeq 0,6 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,075 = -3,10kN$$

für eine Schwächung von 40%:

$$\Delta N \simeq 0,4 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,075 = -2,07kN$$

und für eine Schwächung von 20%:

$$\Delta N \simeq 0,2 \cdot \left[ \frac{1}{2547846} \sum (n_{11}^{LF} \cdot n_{11}^G + 2 \cdot n_{12}^{LF} \cdot n_{12}^G + n_{22}^{LF} \cdot n_{22}^G) \right] \cdot 0,075 = -1,03kN$$

#### 4 Numerische Ergebnisse

Der Vergleich der Ergebnisse nach der Sensitivitätsanalyse mit den exakten Werten ist in der Tabelle 4.4 dargestellt.

$$\frac{2,57}{3559,20} = 0,0007$$

Das Verhältnis von der Ungenauigkeit zu dem exakten Wert ist sehr gering, und beträgt für alle drei Abminderungen weniger als 0,1%.

### 4.2.5 Beispiel 5

In dem Beispiel 5 wird der Einfluss der Steifigkeit der Verbundstütze im Vierendeel-Rahmen auf die Absenkung  $u_z$  der Auskragung berechnet.

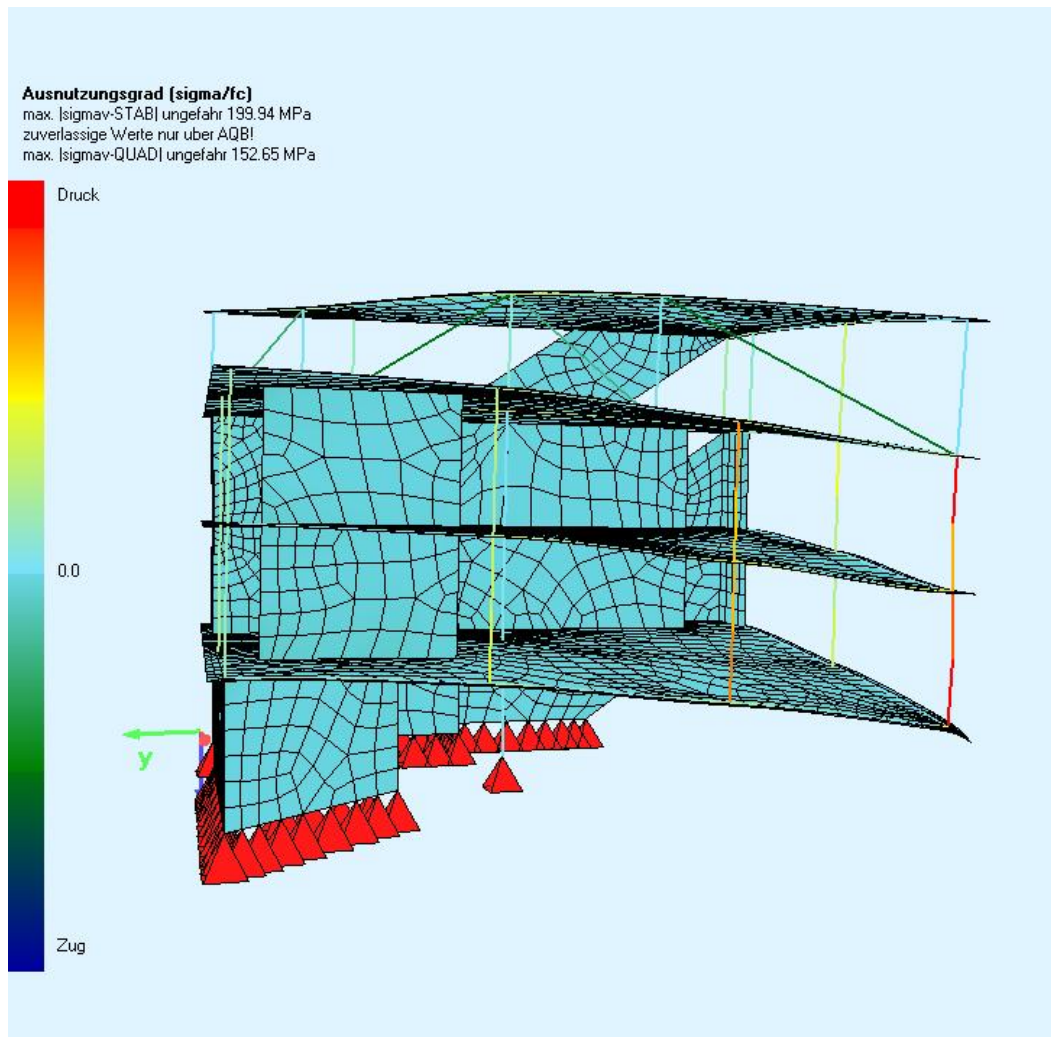
Die Einflussfunktion für die Absenkung wird durch das Aufbringen einer Einzelkraft  $\bar{P}$  erzeugt. Um das Ergebnis gleich richtig zu skalieren, und auch genauere Werte für die resultierende Schnittgrößen zu bekommen, wird eine Kraft  $\bar{P} = 1000kN$  angesetzt. Die Lösung nach dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse wäre dann in  $mm$  statt in  $m$ , was auch die übliche Einheit für die Verformungen ist. Die Einflussfunktion ist im Bild 4.2.5 dargestellt. Da die Stütze auf Doppelbiegung beansprucht ist, müssen auch die Momente um beide Achsen überlagert werden. Bei der Stütze handelt es sich um einen quadratischen Verbundquerschnitt mit der Biegesteifigkeit  $EI = 148575kN/m^2$ , die in beide Richtungen gleich ist, und einer Länge von  $l = 3m$ . Es wird eine Schwächung über die volle Länge von 60%, 40% und 20% angenommen.

Mit der Funktion *Datenbank View* kann man sich die Momentenverläufe  $M_y$  und  $M_z$  in dem veränderten Element ausgeben lassen. Die Verläufe sind jeweils linear, und haben die Werte für  $M_y^{LF}$  von  $263,72kNm$  am Anfang und  $-232,45kNm$  am Ende des Elementes. Die entsprechenden Momente aus der Green'schen Funktion  $M_y^G$  sind  $270,81kNm$  und  $-231,36kNm$ . Die Momente um die z-Achse aus dem Lastfall  $M_z^{LF}$  sind  $102,65kNm$  und  $-46,81kNm$  und aus der Green'schen Funktion  $M_z^G$  sind sie  $53,99kNm$  und  $-37,53kNm$ , jeweils am Anfang und Ende des Stabelementes, groß. Mit Hilfe der Überlagerungstafel kann man die Auswirkung der Steifigkeitsänderung bestimmen. Die Formel für einen solchen Verlauf lautet:

$$\frac{1}{6}[j_1 \cdot (2 \cdot k_1 - k_2) + j_2 \cdot (k_1 - 2 \cdot k_2)] \cdot l \quad (4.29)$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte für die Momente ein, so kommt man auf den Ausdruck für die Überlagerung von den Momenten um die y-Achse:

$$\frac{1}{6}[263,72 \cdot (2 \cdot 270,81 - 231,36) - 232,45 \cdot (270,81 - 2 \cdot 231,36)] \cdot 3 = 63215,62$$



**Abbildung 4.6:** Einflussfunktion für die Absenkung der Kragspitze

**Tabelle 4.5:** Vergleich der Ergebnisse

$u_{z,orig}$ [mm]	$\Delta E$ [%]	$\Delta u_z$ [mm]	$u_{z,c}$ [mm]	$u_{z,c}^{exakt}$ [mm]	$u_{z,c} - u_{z,c}^{exakt}$ [mm]
27,46	-60%	0,27	27,73	27,70	0,03
27,46	-40%	0,18	27,64	27,62	0,02
27,46	-20%	0,09	27,55	27,54	0,01

und für die Momente um die z-Achse:

$$\frac{1}{6}[102,65 \cdot (2 \cdot 53,99 - 37,53) - 46,81 \cdot (53,99 - 2 \cdot 37,53)] \cdot 3 = 4108,99$$

Somit bekommt man nach der Formel 2.48 folgende Gleichung:

$$\Delta u_z \simeq -\frac{\Delta EI}{EI} \cdot \frac{63215,62 + 4108,99}{148575}$$

Der Ausdruck  $-\frac{\Delta EI}{EI}$  wird wie in den vorherigen Beispielen durch die Steifigkeitsänderung ersetzt, und somit bekommt man die Änderung in der Absenkung der Kragspitze für eine Schwächung von 60%:

$$\Delta u_z \simeq 0,6 \cdot \frac{63215,62 + 4108,99}{148575} = 0,27mm$$

für eine Schwächung von 40%:

$$\Delta u_z \simeq 0,4 \cdot \frac{63215,62 + 4108,99}{148575} = 0,18mm$$

und für eine Schwächung von 20%:

$$\Delta u_z \simeq 0,2 \cdot \frac{63215,62 + 4108,99}{148575} = 0,09mm$$

In der Tabelle 4.5 sind die Ergebnisse nach dem Verfahren der Sensitivitätsanalyse mit den exakten Werten gegenübergestellt.

Wie in der Gegenüberstellung deutlich wird, sind die Ergebnisse sehr genau, und liefern eine zuverlässige Vorhersage der Schnittgrößenänderung.

Auch in diesem Beispiel, beträgt die Abweichung nach dem Näherungsverfahren der

#### 4 Numerische Ergebnisse

Sensitivitätsanalyse

$$\frac{0,03}{27,70} = 0,0011.$$

Das entspricht einer Ungenauigkeit von weniger als 1%.

## 4.3 Kalibrierung

Es besteht die Möglichkeit, die Änderung der Schnittgröße mit einem leicht veränderten Ansatz von  $\frac{\Delta EI}{EI}$  bzw.  $\frac{\Delta K}{K}$  oder  $\frac{\Delta EA}{EA}$  zu bestimmen.

Für die Erklärung der Kalibrierungen wird vereinfachend angenommen, dass sich nur das E-Modul  $E$  verändert und die restlichen Größen unverändert bleiben. Dadurch kommt man zum folgenden Ausdruck für den Einfluss der Steifigkeitsänderung auf das System:

$$- \frac{\Delta E}{E} \quad (4.30)$$

Die erste Möglichkeit, die Prognose zu verbessern, ist die Ergänzung der Formel 4.30 mit dem  $\Delta E$  im Nenner:

$$- \frac{\Delta E}{E + \Delta E} \quad (4.31)$$

Die zweite Variante der Verbesserung ist die Ergänzung des Nenners der Formel 4.30 mit  $0,5 \cdot \Delta E$ :

$$- \frac{\Delta E}{E + 0,5 \cdot \Delta E} \quad (4.32)$$

Um die Anwendbarkeit der zwei hier vorgestellten Variationen des Ausdrucks zu untersuchen, werden die oben berechneten Beispiele nochmals für den Ansatz der Steifigkeitsänderung nach den Formeln 4.31 und 4.32 ausgewertet und gegenübergestellt. Die Ergebnisse werden in der Tabelle 4.6 gezeigt. Bei den aufgeführten Werten handelt es sich jeweils um die Abweichung von dem exakten Ergebnis in Prozent nach der jeweiligen Formel.

Aus der Zusammenstellung der Ergebnisse in der Tabelle 4.6 wird deutlich, dass alle Näherungsformeln ausreichend genaue Werte liefern, lediglich bei der 1. Variation treten bei großen Steifigkeitsänderungen nennenswerte Unterschiede auf. Handelt es sich jedoch um eine geringere Schwächung, so liefert auch die Formel 4.31 genaue Werte. Der Ansatz nach der Formel 4.32 führt zu genauen Ergebnissen bei allen untersuchten Systemänderungen.

Die Ausgangsformel führt nach den Ergebnissen dieser Untersuchung zur geringsten Streuung der Werte bei allen Steifigkeitsänderungen und Schnittgrößen und ist auch

**Tabelle 4.6:** Vergleich der Ausgangsformel mit der 1. und 2. Variation

Beispiel	$\Delta E$ [%]	Schnittgröße	$\frac{\Delta E}{E}$	$\frac{\Delta E}{E+\Delta E}$	$\frac{\Delta E}{E+0,5\cdot\Delta E}$
1	-60	$M_y$	1,863	5,104	4,333
1	-40	$M_y$	1,182	2,141	2,441
1	-20	$M_y$	0,513	0,694	0,994
2	-60	$m_{yy}$	0,017	0,115	0,044
2	-40	$m_{yy}$	0,008	0,040	0,022
2	-20	$m_{yy}$	0,008	0,011	0,008
3	-60	$N$	0,038	3,482	2,644
3	-40	$N$	0,266	1,312	1,651
3	-20	$N$	0,190	0,389	0,721
4	-60	$N$	0,039	0,092	0,052
4	-40	$N$	0,057	0,018	0,072
4	-20	$N$	0,072	0,065	0,082
5	-60	$u_z$	0,108	1,588	0,542
5	-40	$u_z$	0,072	0,507	0,253
5	-20	$u_z$	0,036	0,109	0,073

die einfachste in der Handhabung.

Es ist festzustellen, dass die Ergebnisse nach allen drei Ansätzen stets mehr als ausreichende Aussagekraft über die Änderung in einer Schnittgröße haben. Die Abweichungen von den exakten Werten liegen innerhalb der Toleranzgrenzen für die praktischen Anwendungen jeglicher Art.

## 5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Verfahren der Sensitivitätsanalyse vorgestellt und untersucht.

In dem zweiten Kapitel 'Sensitivitätsanalyse' wurden die theoretischen Grundlagen erläutert, auf denen das Verfahren basiert. Anschließend folgte die Herleitung der Sensitivitätsanalyse. Es wurden zwei Wege vorgestellt, diese herzuleiten. Die erste Möglichkeit basiert an dem Prinzip der schwachen Formulierung

$$a(w, v) = (p, v),$$

und die zweite Möglichkeit das Verfahren herzuleiten, ist über das Gleichgewicht der virtuellen äußeren und inneren Arbeiten

$$\delta A_a = \delta A_i.$$

Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis. Durch das Einsetzen von der Green'schen Funktion für die Verformungsfigur des geänderten Systems bekommt man eine Näherungsformel, bei der alle Eingangsgrößen aus dem unveränderten System stammen, und somit ist die Berechnung des geschwächten Systems nicht erforderlich. Mit dieser Formel lässt sich die Änderung der Schnittgrößen bei lokalen Systemschwächungen bestimmen. Die zentrale Formel der Sensitivitätsanalyse ist

$$J(e_u) \simeq -d(u, G)$$

und aus ihr folgt

$$w_c(x) - w(x) \simeq - \int_{x_1}^{x_2} \Delta EI w'' G'' dx.$$

Setzt man für  $G$  die Einflussfunktion der betrachteten Kraft- oder Weggröße, so bekommt man die Änderung in dieser, abhängig von der Steifigkeitsänderung  $\Delta EI$  im Intervall  $[x_1, x_2]$ .

An einem in SOFiSTiK erstelltem 3D-Modell eines Bürogebäudes wurden die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse untersucht.

Die betrachteten Schnittgrößen waren unter anderem die Absenkung, Momente in Stab- und Plattenelementen, Normalkraft in Seilen und Stabelementen und die Querkraft in Platten. Die Untersuchung erfolgte für unterschiedliche Steifigkeitsänderungen in diversen Bauteilen.

Damit eine Auswertung der Näherungslösung vorgenommen werden konnte, wurden auch die exakten Werte für die betrachteten Kraft- und Weggrößen berechnet.

Der Vergleich der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse mit den genauen Werten zeigt, dass bei der Ausgangsformel sich die Differenzen als klein erweisen ( $< 2\%$ ), bei der 1. und 2. Variation kommt man auf die maximalen Abweichungen von jeweils 5,1% und 4,3%. Somit kann man das Verfahren zur Sensitivitätsanalyse als genau und für die praktische Anwendung als absolut geeignet einstufen.

Die Implementierung der Sensitivitätsanalyse in die statischen Programme wäre auch möglich, da die meisten FE-Programme mit allen nötigen Werkzeugen schon ausgestattet sind.

Ein großer Vorteil, den die Sensitivitätsanalyse mit sich bringt, ist die Analyse des Tragwerks und möglicher lokaler Schwächungen mit ihren Auswirkungen auf andere Bauteile, wobei diese keine Berechnung von geändertem System erfordert. Dies bringt für den Anwender große Vorteile bei der Tragwerksanalyse im Sinne der Zeitersparnis. Um die Folgen der Systemschwächungen zu bestimmen, bedarf es nicht der Veränderung des System, deshalb muss der Anwender dieses nicht neu modellieren. Dadurch kommt man auch schneller zum gewünschten Ergebnis bei der Untersuchung des Systems auf Anfälligkeiten für gewisse Änderungen im Tragwerk.

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Ansicht 1 . . . . .	20
3.2	Ansicht 2 . . . . .	21
3.3	Neues Projekt anlegen . . . . .	24
3.4	SSD-Oberfläche . . . . .	25
3.5	Eigenschaften eines Flächenelementes . . . . .	26
3.6	Eingabe in AutoCAD und SOFiPLUS . . . . .	29
3.7	Berechnetes System . . . . .	30
4.1	Lastfall Eingengewicht, Ansicht 1 . . . . .	35
4.2	Lastfall Eingengewicht, Ansicht 2 . . . . .	36
4.3	Einflussfunktion für das Moment $M_y$ in der Stütze des Vierendeel- Rahmens . . . . .	40
4.4	Einflussfunktion für das Moment $m_{yy}$ in der Decke des 1 OG . . . . .	43
4.5	Einflussfunktion für die Normalkraft in der Hauptstütze . . . . .	47
4.6	Einflussfunktion für die Absenkung der Kragspitze . . . . .	52



# Literaturverzeichnis

- [1] Hartmann, F., Katz, C. (2007): *Structural Anylysis with Finite Elements*, Springer-Verlag, 2nd Edition
- [2] Schneider, K.-J. (2006): *Bautabellen für Ingenieure*, Werner Verlag, 17. Auflage
- [3] Mitschriften der Vorlesung *Statik III*, WS 2007/2008, Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann, Universität Kassel, Fachbereich 14, Fachgebiet Baustatik
- [4] Mitschriften der Vorlesung *Mathematischen Grundlagen der Statik*, SS 2008, Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann, Universität Kassel, Fachbereich 14, Fachgebiet Baustatik
- [5] Mitschriften der Vorlesung *Flächentragwerke I*, SS 2008, Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann, Universität Kassel, Fachbereich 14, Fachgebiet Baustatik
- [6] Carl, O. (2004): *Diplomarbeit 2: Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen*, Universität Kassel, Fachbereich 14, Fachgebiet Baustatik
- [7] Sopoht, M., Sopoht G. (2008): *Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise*, Universität Kassel, Fachbereich 14, Fachgebiet Baustatik
- [8] Franke, W., Kunow, T. (2007): *Kleines Einmaleins der Baustatik*, Kassel University Press